

การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิต “พิบูลบำเพ็ญ”
(A Study of Misconception in Mathematics of
Grade 10 Students of Piboonbumpen School)

ดร. เวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร*

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิต “พิบูลบำเพ็ญ” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/7 จำนวน 41 คน ของโรงเรียนสาธิต “พิบูลบำเพ็ญ” มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี ที่ศึกษาในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 2 ชนิด คือ แบบฝึกหัด และแบบทดสอบย่อยประจำบท ผลการวิจัย พบว่า ในเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์และเนื้อหาภาคตัดกรวย นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้ง 4 ด้านที่ทำการศึกษา ได้แก่ ด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ ด้านการคิดคำนวณ และด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา

คำสำคัญ : มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์

Abstract

The purpose of this research was to study on misconception in mathematics of Grade 10 Piboonbumpen Demonstration School students. A sample group of 41 Grade 10 students in Piboonbumpen Demonstration School Burapha University Chonburi were selected. Instrument of this study were exercises and tests. The results of the study revealed in analytic geometry and conic section contents, students had misconceptions in four categories as follows: problem interpretation, use of theories, laws, formulas, definitions and properties, calculation and checking the solution.

Keyword: Misconception on Mathematics

* อาจารย์ประจำภาควิชาการจัดการเรียนรู้ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา อ.เมือง จ.ชลบุรี

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

มโนทัศน์ เป็นเรื่องที่สำคัญสำหรับการจัดการเรียนรู้ เนื่องจาก การเรียนรู้มโนทัศน์ จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาการเรียนรู้ในเรื่องอื่นๆ ถึงระดับสูงสุดได้ และยังช่วยให้ผู้เรียนสามารถ เรียนรู้สิ่งที่เกี่ยวข้องได้รวดเร็วขึ้น เพราะเกิดจากการจัดระบบระเบียบของข้อมูล ได้เรียบร้อยแล้วในสมอง เมื่อปะทะกับสิ่งเร้าใหม่ ก็สามารถจำแนก จัดหมวดหมู่ และเชื่อมโยงกับมโนทัศน์ที่มีอยู่ได้ง่าย อีกทั้งมโนทัศน์เป็นรากฐานของความคิด มนุษย์จะคิด ไม่ได้ถ้าไม่มีมโนทัศน์พื้นฐาน เพราะมโนทัศน์จะช่วยในการตั้งกฎเกณฑ์ หลักการต่างๆ และสามารถที่จะแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ได้ นอกจากนี้มโนทัศน์ยังเป็นเครื่องมือที่จะช่วยในการสื่อความหมายที่จะทำให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน (นวลจิตต์ เชาวถวิลพิกุล, 2537, หน้า 57; สุรางค์ ไก่กระจอก, 2541, หน้า 362) ถึงแม้ว่ามโนทัศน์จะมีบทบาทสำคัญเพียงใดก็ตาม ก็มีนักเรียนจำนวนมากไม่น้อยที่มึนงงสับสนในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ ทำให้เกิดเป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนซึ่งมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน นับถือเป็นปัญหาที่สำคัญต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน ดังที่ Brown (1992, pp. 17-34) ได้กล่าวว่า “มโนทัศน์พื้นฐานที่คลาดเคลื่อนจะก่อให้เกิดปัญหาในการเรียนรู้และการทำความเข้าใจในมโนทัศน์ที่สูงขึ้น ฉะนั้นหากผู้เรียนมีมโนทัศน์เดิมคลาดเคลื่อนก็จะส่งผลกระทบต่อการศึกษา การแสดงวิธีทำ และการเรียนรู้ในเนื้อหาที่สูงขึ้นต่อไป” แต่ถ้าสามารถทราบถึงจุดที่นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนก็จะเป็นประโยชน์ในการจัดการเรียนรู้ โดยเฉพาะในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นวิชาที่มีเนื้อหาต่อเนื่อง มีความซับซ้อนและมีลักษณะเป็นนามธรรม หากเราสามารถให้ข้อมูลย้อนกลับ

เกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนแต่ละคนได้ภายหลังของการประเมินผลการเรียนรู้ในแต่ละเนื้อหาก่อนที่จะเรียนเรื่องต่อไปก็จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง ทั้งต่อตัวนักเรียนเองและการปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนของครู ทำให้นักเรียนรู้ว่าตนเองยังมีความบกพร่องที่จุดใด ควรจะปรับปรุงตนเองอย่างไรเพื่อให้ผลการเรียนดีขึ้น ขณะเดียวกันครูผู้สอนเมื่อทราบข้อมูลเกี่ยวกับตัวผู้เรียนแล้วก็สามารถจะนำมาใช้ในการปรับปรุงการสอนของตน เพื่อให้เกิดผลสัมฤทธิ์กับผู้เรียนมากที่สุด และข้อมูลเหล่านี้มีความหมายมากเนื่องจากเป็นแนวทางในการช่วยแก้ปัญหาและสามารถอธิบายได้ว่าเพราะสาเหตุใดนักเรียนจึงมีการพัฒนาด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ช้า ซึ่งนักวิจัยอื่นอ้างว่า เมื่อความคลาดเคลื่อนของนักเรียนได้แสดงออกมาทำให้เห็นว่า การเรียนรู้กำลังจะเริ่มขึ้น (Chai, 1987, pp. 189 -198) ด้วยเหตุดังกล่าวผู้วิจัยจึงมีความเห็นว่า การที่จะพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ให้มีประสิทธิภาพนั้นครูผู้สอนจำเป็นต้องรู้ว่า ผู้เรียนที่ตนสอนนั้นมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในจุดใดและมีลักษณะเป็นอย่างไร เพื่อเป็นข้อมูลในการวางแผนแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งในระดับบุคคลและส่วนรวม อีกทั้งเป็นการวางพื้นฐานทางด้านการเรียนคณิตศาสตร์ของผู้เรียนให้ดีขึ้น เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้เรียนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้อง และเป็นแหล่งข้อมูลในการศึกษาค้นคว้าต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิต “พิบูลบำเพ็ญ” มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี

ขอบเขตของการวิจัย

เนื้อหาที่ ทำการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เป็นเนื้อหาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ และ ภาคตัดกรวย

การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ 4 ด้าน คือ ด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ ด้านการคิดคำนวณ และด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา โดยแต่ละด้านมีมโนทัศน์ย่อย ดังนี้

1. ด้านการตีความจากโจทย์ มีส่วนประกอบของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ดังนี้

1.1 เปลี่ยนแปลงคำถามเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง

1.2 นำข้อมูลที่เกิดหรือ โจทย์ไม่กำหนดมาใช้ในการคำนวณ

1.3 ไม่ใช้ข้อมูลที่โจทย์กำหนด

1.4 เขียนหรือแปลความหมายของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือสิ่งที่โจทย์ให้หาไม่ครบ เป็นไม่ชัดเจนหรือผิดพลาด

1.5 กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือสิ่งที่โจทย์ให้หาผิด

1.6 ไม่เข้าใจความหมายของตัวแปรที่โจทย์กำหนด

1.7 นำข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาหาคิด

2. ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ มีส่วนประกอบของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ดังนี้

2.1 จำทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติผิด

2.2 ขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ

2.3 ไม่สามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท

สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ

3. ด้านการคิดคำนวณ มีส่วนประกอบของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ดังนี้

3.1 ขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้น

3.2 ขาดความเข้าใจในพีชคณิตเบื้องต้นในการแก้สมการและอสมการ

3.3 ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

4. ด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา มีส่วนประกอบของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ดังนี้

4.1 การไม่ทำตามขั้นตอนตามที่ โจทย์ต้องการ หรือทำไม่สำเร็จ

4.2 สรุปคำตอบจากโจทย์ไม่ถูกต้อง ไม่ครบทุกกรณี

4.3 ไม่สรุปคำตอบให้เป็นผลสำเร็จตามหลักคณิตศาสตร์

4.4 แสดงวิธีการตรวจสอบคำตอบไม่ครบ ไม่ชัดเจน ผิดพลาด

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/7 จำนวน 41 คน ของโรงเรียนสาธิต “พิบูลบำเพ็ญ” อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ที่ศึกษาในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ 2 ชนิด ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย เครื่องมือทั้ง 2 ชนิด ได้แก่

1. แบบฝึกหัด ประกอบด้วย แบบฝึกหัดย่อยในแต่ละบทเรียน แบบฝึกหัดประจำบทและแบบฝึกหัดที่เป็นโจทย์ประยุกต์ โดยที่แบบฝึกหัดย่อยในแต่ละบทเรียนและแบบฝึกหัดประจำบท

เป็นแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ส่วนแบบฝึกหัดที่เป็นโจทย์ประยุกต์ เป็นแบบฝึกหัดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบ ซึ่งแบบฝึกหัดเหล่านี้ก็เรียนต้องแสดงวิธีทำในสมุดแบบฝึกหัดหรือเอกสาร เพื่อให้ผู้วิจัยได้ตรวจสอบแบบฝึกหัดหรือเอกสาร

2.แบบทดสอบย่อยประจำบทเป็นข้อสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบ

การเก็บรวบรวมข้อมูล มีขั้นตอนดำเนินการ ดังนี้

1. ในขณะที่ผู้วิจัยสอนได้มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดและแบบฝึกหัดประจำบทในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1.2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังจากเรียนเนื้อหาข้อสอบแต่ละเรื่องจบแล้วลงในสมุดแบบฝึกหัดหรือเอกสาร ส่วนแบบฝึกหัดโจทย์ประยุกต์ผู้วิจัยได้มอบหมายให้นักเรียนทำหลังจากที่นักเรียนทำแบบฝึกหัดประจำบทเสร็จเรียบร้อยแล้วหลังจากทำแบบฝึกหัดที่กล่าวมาข้างต้นแล้วผู้วิจัยได้มอบหมายให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยประจำบทลงในเอกสารที่เป็นแบบฝึกหัดสุดท้าย ซึ่งการทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบนั้นผู้วิจัยได้มอบหมายให้นักเรียนทำอย่างค่องเคื่องและสม่ำเสมอ

2. นำสมุดแบบฝึกหัดและเอกสารแสดงวิธีทำของแบบฝึกหัดและแบบทดสอบย่อยประจำบททั้ง 4 ประเภท มาตรวจ รวบรวม และจำแนกมโนทัศน์ที่กลายเคลื่อนที่พบออกเป็นด้านจำนวน 4 ด้าน ได้แก่ ด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ ด้านการคิดคำนวณ และด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา โดยผู้วิจัยทำการรวบรวมข้อมูลตั้งแต่เดือนมิถุนายน 2551 ถึงเดือนกันยายน 2551

การวิเคราะห์ข้อมูล

นำมโนทัศน์ที่กลายเคลื่อนที่พบในแต่ละเนื้อหา และแต่ละด้านมาเขียนบรรยายเป็นความเรียง

ผลการวิจัย

เมื่อหาเรื่อง เรขาคณิต วิเคราะห์

ด้านตีความจากโจทย์ พบว่านักเรียน

มีมโนทัศน์ที่กลายเคลื่อนที่ 1 มโนทัศน์ ดังนี้

1. นำข้อมูลที่เกิดหรือโดยที่ไม่กำหนดมาใช้ในการคำนวณ เช่น

โจทย์กำหนดให้หา จุดกึ่งกลางระหว่าง $(-2,1)$ และ $(4,-3)$ แล้วนักเรียนคำนวณจุดกึ่งกลางระหว่าง $(-2,1)$ และ $(4,3)$

ด้านการใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติ พบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่กลายเคลื่อนที่ 3 มโนทัศน์ ดังนี้

1. จำทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติผิด เช่น

1.1 จำสูตรการหารยะห่างระหว่าง

จุดสองจุดผิด โดยจำเป็น $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

หรือ $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ หรือ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

1.2 จำสูตรการหาความชันของเส้นตรงที่มีสมการเป็น $Ax + By + C = 0$ ผิด

โดยจำเป็น ความชัน = $-\frac{A}{B}$

1.3 จำสูตรการหารยะห่างระหว่างจุด

กับเส้นตรงผิด โดยจำเป็น $d = \frac{|Ax + By + C|}{A^2 + B^2}$

2. ขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท
กฎ สูตร นิยาม และสมบัติ เช่น

2.1 ไม่เข้าใจความหมายของคำว่า
ระยะตัดแกน โดยเข้าใจว่าระยะตัดแกนหมายถึง
ผลต่าง

3. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม
และสมบัติไม่ถูกต้อง เช่น

3.1 จากโจทย์ จงหาสมการเส้นตรงที่มี
ระยะตัดแกน X เท่ากับ 3 และระยะตัดแกน Y
เท่ากับ 4

นักเรียน ไม่เข้าใจการประยุกต์ใช้สูตร
เรื่องระยะตัดแกน โดยตอบว่า สมการเส้นตรงคือ

$$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$$

3.2 จากโจทย์ ให้หาความชันของ
เส้นตรง $3y - 2x + 1 = 0$ นักเรียนไม่สามารถ
ประยุกต์ใช้สูตรเรื่องความชันของเส้นตรงได้
โดยกล่าวว่าความชันของเส้นตรงเส้นนี้ คือ

$$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

3.3 จากโจทย์ จงหาระยะระหว่างจุด
 $(-5, 1)$ กับเส้นตรง $-3x + 4y - 2 = 0$

นักเรียนประยุกต์ใช้สูตรระยะ
ระหว่างจุดกับเส้นตรงไม่ถูกต้อง

$$(d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}})$$

โดยตอบว่า

$$d = \frac{|-3 + 4 - 2|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$$

หรือ นักเรียนหาค่า C จากระยะตัดแกน

Y ก่อน โดยได้ $y = \frac{3}{5}$ แล้วนักเรียนตอบว่า

$$d = \frac{|-3(-5) + 4(1) + \frac{3}{5}|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$$

ส่วนการคิดคำนวณ พบว่านักเรียนมี
มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 3 มโนทัศน์ ดังนี้

1. ขาดทักษะในหลักเลขคณิตเบื้องต้น

เช่น

$$1.1 \quad \frac{-3}{2}(x-1) = -3x+4$$

$$1.2 \quad -3^2 = (-3)^2$$

2. ขาดทักษะในหลักพีชคณิต เช่น

$$2.1 \quad \text{หาก } y = x + \frac{3}{5}$$

$$\text{ได้ } y = x - y + \frac{3}{5}$$

$$2.2 \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \text{ ดังนั้น } x+y=12$$

$$2.3 \quad 2x-5y+3=0 \text{ แทน } x=0 \text{ ได้ } 20-5y+3=0$$

3. ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ
เช่น

$$3.1 \quad \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+(-3)}{2} \right) = (1, 2)$$

$$3.2 \quad \text{จาก } y+1 = \frac{-3}{2}(x-1) \text{ ได้ } 2y+2 = 3x+3$$

ส่วนการตรวจสอบการแก้ปัญหา พบว่า
นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 1 มโนทัศน์ดังนี้

1. ไม่สรุปคำตอบให้เป็นผลสำเร็จตาม
หลักคณิตศาสตร์ เช่น

1.1 ไม่กระจายให้เป็นผลสำเร็จก่อน
ตอบ เช่น ตอบว่า

สมการเส้นตรง คือ $y + 3 = 3(x-1)$

แทนที่จะตอบว่า $y = 3x - 6$

เนื้อหาเรื่อง ภาคตัดกรวย

ด้านตีความจากโจทย์ พบว่านักเรียนมี
มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 2 มโนทัศน์ ดังนี้

1. นำข้อมูลที่ผิดหรือโจทย์ไม่กำหนด
มาใช้ในการคำนวณ เช่น

1.1 จากโจทย์ จงหาสมการของ
พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี

$16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$
และแกนโทของวงรี หับไคเรกตริกซ์ของ
พาราโบลา

1.1.1 ใช้แกนเอกของวงรีเป็น
ไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา

1.1.2 ใช้แกนโทของวงรีเป็น
แกนของพาราโบลา

1.1.3 ใช้ความยาวของแกนโทเป็น
สมการไคเรกตริกซ์ของพาราโบลาแล้วให้เป็นค่า c

1.2 จากโจทย์ จงหาโคออร์ดิเนตของ
จุดศูนย์กลาง จุดยอดและสมการวงรีที่ผ่านจุด
เชิงเส้นและมีจุด $(\pm 1, 1)$ เป็นจุดโฟกัส

1.2.1 ให้ b เท่ากับระยะห่าง
ระหว่างจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส

1.2.2 นำจุดศูนย์กลางและจุดใด ๆ
บนส่วนโค้งไปหาค่า c

1.2.3 แทนค่าจุดที่วงรีผ่านจุด (x, y)
ใด ๆ ในสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของ a, b, c
เพื่อหาค่า b โดยให้ $x = a$ และ $y = c$

1.2.4 ให้ระยะห่างจากจุด $(0, 0)$
ถึงจุดโฟกัสเป็นค่า c (โดยที่โจทย์ไม่ได้กำหนด
ค่าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด $(0, 0)$)

1.2.5 ให้ระยะระหว่างจุดโฟกัส
ทั้งสองเป็นความยาวของแกนโท

1.2.6 ใช้จุดใด ๆ บนวงรีที่โจทย์

กำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลางของวงรี

1.3 จากโจทย์ จงหาสมการเส้นตรง
ที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 39 = 0$ และขนานกับเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(2, 3)$

นักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลาง
ของวงกลมได้ คือ จุด $(1, 5)$ แต่เมื่อทำการหา
สมการเส้นตรงนักเรียนไม่ใช้จุดศูนย์กลางของ
วงกลมเป็นจุดผ่าน นักเรียนใช้จุด $(2, 3)$ ที่โจทย์
ให้เป็นจุดผ่าน

2. นำข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้นำมาใช้คิด
เช่น

2.1) จากโจทย์ จงหาสมการวงรีที่มีแกน
ตามขวางและแกนตั้งของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 41 = 0$ เป็นแกนโทและ
แกนเอกของวงรีตามลำดับ

นักเรียนนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา
ใช้คิด โดยใช้นกตามขวางของไฮเพอร์โบลา
เป็นแกนเอกของวงรี และแกนตั้งของไฮเพอร์
โบลาเป็นแกนโทของวงรี

ด้านการใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม
และสมบัติ พบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่
คลาดเคลื่อน 3 มโนทัศน์ ดังนี้

1. จำทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และ
สมบัติผิด เช่น

1.1 จำรูปสมการของวงกลมที่มีจุด
ศูนย์กลางที่ (h, k) รัศมียาว r หน่วยไม่ได้ โดยจำเป็น
 $(x - |h|)^2 + (y - |k|)^2 = r^2$
 $(x + h)^2 + (y + k)^2 = r^2$
 $r(x - h)^2 + r(y - k)^2 = r^2$
 $x^2 + y^2 = r^2$

1.2 จำทฤษฎีบทของจุดโฟกัสของ
พาราโบลาที่มีสมการเป็น $x^2 = 4cy$ ไม่ได้ โดยจำว่า
จุดโฟกัสคือ

จุด $(c, 0)$ จุด $(4c, 0)$

จุด $(0, -4c)$ จุด $(0, 4c)$

1.3 จ्ञาเส้นไคเรกตริกซ์ของสมการพาราโบล่า $y^2 = 4cx$ ไม่ได้ โดยจ้่าว่าเส้นไคเรกตริกซ์คือ

เส้นตรง $x = c$ เส้นตรง $x = -c$

เส้นตรง $x = -4c$

1.4 จ्ञาพิกัดของจุดยอดของพาราโบล่าที่มีสมการเป็น $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ไม่ได้ โดยจ้่าว่าพิกัดของจุดยอด คือ จุด $(-h, -k)$

จุด $(|h|, |k|)$

1.5 จ्ञาพิกัดของจุดโฟกัสของพาราโบล่าที่มีสมการเป็น $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ไม่ได้ โดยจ้่าว่าพิกัดของจุดโฟกัสคือ จุด (h, k)

1.6 จ्ञารูปกราฟของพาราโบล่าที่มีสมการเป็น $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ โดยที่ $c < 0$ ไม่ได้ โดยจ้่าว่าเป็นกราฟพาราโบล่าหงาย

1.7 จ्ञาพิกัดของจุดยอดของวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ ไม่ได้ โดยจ้่าว่าพิกัดของจุดยอด คือ

จุด $(0, -b)$ และ $(0, b)$

จุด $(-b, 0)$ และ $(b, 0)$

จุด $(-a, 0)$ และ $(a, 0)$

จุด $(-b^2, 0)$ และ $(b^2, 0)$

1.8 จ्ञาความยาวแกนเอกและแกนโทของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ หรือ (h, k) และแกนเอกอยู่บนแกน x หรือแกน y ไม่ได้ โดยจ้่าว่า

a แทน ความยาวแกนเอก

b แทน ความยาวแกนโท

a^2 แทน ความยาวแกนเอก

b^2 แทน ความยาวแกนโท

1.9 จ्ञาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และแกนเอกอยู่บนแกน x ไม่ได้ โดยจ้่าว่าสมการคือ

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

1.10 จ्ञาพิกัดของจุดโฟกัสของวงรีที่มีสมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ไม่ได้

โดยจ้่าว่าพิกัดของจุดโฟกัส คือจุด $(h-c, k)$ และ $(h+c, k)$

1.11 จ्ञาพิกัดของจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และแกนตามขวางอยู่บนแกน x ไม่ได้ โดยจ้่าว่าพิกัดของจุดโฟกัสคือจุด $(0, -c)$ และ $(0, c)$

1.12 จ्ञาความยาวแกนตามขวางและความยาวแกนสังยุคของไฮเพอร์โบล่าไม่ได้ โดยจ้่าว่า

a แทน ความยาวแกนตามขวาง

b แทน ความยาวแกนสังยุค

a^2 แทน ความยาวแกนตามขวาง

b^2 แทน ความยาวแกนสังยุค

1.13 จ्ञาพิกัดจุดยอดไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และแกนตามขวางขนานแกน y ไม่ได้ โดยจ้่าว่าพิกัดของจุดยอดคือ จุด $(0, -a)$ และ $(0, a)$

1.14 จ्ञาพิกัดของจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และแกนตามขวางขนานแกน x ไม่ได้ โดยจ้่าว่าพิกัดของจุดโฟกัสคือจุด $(h, k-c)$ และ $(h, k+c)$

1.15 จ्ञาสูตรแสดงความสัมพันธ์ของ a^2, b^2, c^2 ของไฮเพอร์โบล่าไม่ได้ โดยจ้่าว่า

$$c^2 + b^2 = a^2 \quad c^2 + a^2 = b^2$$

1.16 จำระยะทางจากจุด P ถึง F ของวงรีผัด โดยจำเป็น $PF + PF' = 2a$ แต่ที่ถูกต้องคือ

$$|PF| + |PF'| = 2a$$

1.17 จำพิกัดจุดศูนย์กลางของไฮเปอร์-

โบล่าที่มีสมการเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

ไม่ได้ โดยจำว่า พิกัดของจุดศูนย์กลางคือ จุด (k, h)

1.18 จำว่าความยาวระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองของไฮเปอร์โบล่าเท่ากับ $2a$

1.19 จำสมการไฮเปอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางขนานแกน Y ไม่ได้ โดยจำว่าสมการคือ

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

1.20 จำสูตรแสดงความสัมพันธ์ของ a^2, b^2, c^2 ของวงรีไม่ได้ โดยจำว่า

$$c^2 = b^2 + a^2$$

2. ขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบทกฎ สูตร นิยาม และสมบัติ เช่น

2.1 ใช้ r^2 แทนความยาวรัศมีของวงกลม

2.2 ใช้ $(r')^2$ แทนความยาวรัศมีของวงกลม

2.3 ใช้ \sqrt{r} แทนความยาวรัศมีของวงกลม

2.4 $(\text{ความยาวของรัศมีวงกลม})^2 = (\text{เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม})^2/2$

2.5 เข้าใจว่า ค่า c ที่ใช้ในสมการพาราโบล่าเป็นจุดโฟกัสของพาราโบล่า

2.6 เข้าใจว่า จุดที่วงรีผ่านเป็นจุดศูนย์กลางของวงรี

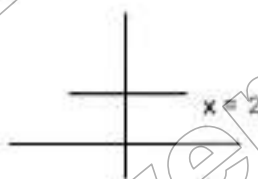
2.7 เขียนคู่ลำดับแทนจุดใดๆ ผิด เช่น จุด (h, k) นักเรียนเขียนเป็น h, k

2.8 เขียนสัญลักษณ์แทนคู่ลำดับใดๆ ไม่ถูกต้อง เช่น จุดโฟกัส คือ $(\pm 1, 1)$ เขียนเป็น $(1, 1)(-1, 1)$

2.9 ใช้สัญลักษณ์การขนานกันไม่ถูกต้อง โดยใช้ว่า $(1, -5) \parallel (2, 3)$

2.10 เข้าใจว่าสมการไครเรตริกซ์เป็นจุด เช่นตอบว่า สมการไครเรตริกซ์คือ $(-8, 4)$

2.11 ขาดความรู้เกี่ยวกับสมการเส้นตรง โดยตอบว่า



2.12 ขาดความรู้พื้นฐานเรื่องการทำกำลังสองสมบูรณ์ เช่น

จาก $x^2 - 4x - 8y + 4$ ได้ $(x-2)^2 - 8y + 4 - 4$

2.13 เข้าใจว่าจุดปลายแกนโทของวงรีเท่ากับ $2b$

3. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติไม่ถูกต้อง เช่น

3.1 จากโจทย์ จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ และผ่านจุด $(-2, -3), (-1, 2)$

นักเรียนหาระยะตั้งฉากของจุดปลายคอร์ดจุดหนึ่งไปยังสมการของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม แล้วกำหนดให้เป็นรัศมีวงกลม เช่นหาระยะตั้งฉากระหว่างจุด $(-2, -3)$ กับเส้นตรง $x + y - 1 = 0$

$$\text{รัศมีของวงกลม} = \frac{1(-2) + 1(-3) - 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}}$$

3.2 ไม่เข้าใจนิยามของคอร์ดกับเส้นผ่านศูนย์กลาง โดยใช้คอร์ดที่โจทย์กำหนดเป็นเส้น

ผ่านศูนย์กลาง และจุดกึ่งกลางของคอร์ดเป็นจุดศูนย์กลาง โดยไม่ได้ตรวจสอบว่าคอร์ดที่กำหนดให้มันเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางหรือไม่

3.3 นักเรียนไม่สามารถหาพิกัดของจุดที่กำหนดให้บนแกนใหม่ได้ดังนี้

จากโจทย์ ถ้าเลื่อนแกนทางขนานไปโดยใช้จุด $(-1, 2)$ เป็นจุดกำเนิดใหม่ แล้วพิกัดของจุด $(4, 5)$ บนแกนใหม่คือ จุดใด

นักเรียนตอบว่า

จุด $(-5, -3)$ เนื่องจากใช้ $(h - x, k - y)$

แทนพิกัดของจุด

จุด $(3, 7)$ เนื่องจากใช้ $(x + h, y + k)$

แทนพิกัดของจุด

3.4 นักเรียนไม่สามารถหาพิกัดของจุดกำเนิดใหม่

จากโจทย์ ถ้าเลื่อนแกนทางขนานไปที่จุดกำเนิดใหม่ ซึ่งทำให้สมการ $(x - 5)(y + 2) = 1$ เทียบกับแกนใหม่เป็น $x'y' = 1$ แล้วพิกัดของจุดกำเนิดใหม่คือจุดใด

นักเรียนตอบว่า จุด $(-2, 5)$ เนื่องจากใช้ (x, h) เป็นพิกัดของจุดกำเนิดใหม่ $(h, |k|)$

จุด $(5, 2)$ เนื่องจากใช้

เป็นพิกัดของจุดกำเนิดใหม่

จุด $(-5, 2)$ เนื่องจากใช้ $(-h, -k)$

เป็นพิกัดของจุดกำเนิดใหม่

จุด $(-5, -2)$ เนื่องจากใช้ $(-h, k)$

เป็นพิกัดของจุดกำเนิดใหม่

3.5 จากโจทย์ จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสที่ $(-5, 4)$ และ $x = 1$ เป็นสมการไดเรกทริกซ์

นักเรียนสามารถบอกได้ว่าเป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย มีจุดยอดอยู่ที่ $(-2, 4)$ และระยะห่างจากจุดยอดกับจุดโฟกัสเท่ากับ 3

แต่เมื่อนำค่าต่างๆไปแทนในสมการพาราโบลา นักเรียนแทนค่า c ผิด โดยแทนค่า c เป็นบวก โดยนักเรียนตอบว่าสมการพาราโบลา คือ

$(y - 4)^2 = 4(3)(x + 2)$ แต่ที่ถูกต้องคือต้องแทนค่า c เป็นลบ โดยตอบว่า $(y - 4)^2 = 4(-3)(x + 2)$

3.6 ไม่เข้าใจว่าจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดยอดทั้งสองจุดของไฮเพอร์โบลา

ด้านการคิดคำนวณ พบว่านักเรียนมีโน้ตบันทึกตลาดเคลื่อน 3 มโนทัศน์ ดังนี้

1. ขาดทักษะในหลักเลขคณิตเบื้องต้น

เช่น

$$1.1 \sqrt{1} + \sqrt{1} = \sqrt{2}$$

$$1.2 -4 = -4$$

$$1.3 -54(-3) = 2$$

$$1.4 -64-12 = -78$$

2. ขาดทักษะในหลักพีชคณิต เช่น

2.1 จาก $3(x - 3)^2 - y - 30$ ได้ $(x - 3)^2 = y + 10$

$$2.2 (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 2$$

$$2.3 (x - 1)^2 = x^2 - 2x$$

$$2.4 -4y^2 - 8y = -(4y^2 + 8y)$$

3. ขาดความระมัดระวังในการ คิดคำนวณ

เช่น

3.1 จุดกึ่งกลางของ $(-2, -3)$ กับ $(-1, 2)$

คือ $\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ มาจาก $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 - 1}{2} = \frac{-3}{2}$

$$\text{และ } \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}$$

ด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา พบว่านักเรียนมีโน้ตบันทึกตลาดเคลื่อน 2 มโนทัศน์ดังนี้

1. ไม่หาคำตอบตามที่ โจทย์ต้องการ หรือทำไม่เสร็จ เช่น

1.1 จากโจทย์ จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y - 1$ และผ่านจุด $(-2, -3), (-1, 2)$

นักเรียนหาคำตอบในสิ่งที่ โจทย์ ไม่ต้องการ คือ

1.1.1 หาความยาวคอร์ด

1.1.2 หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, -3)$ กับ $(-1, 2)$ แล้วนำไปหาจุดตัดกับ สมการเส้นผ่านศูนย์กลาง $x + y - 1$ แล้วกำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

1.1.3 หาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด $(0, 0)$

1.1.4 หาสมการเส้นตรงจากจุดใด ๆ บนวงกลมกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

1.1.5 หาสมการเส้นตั้งฉากจากจุดใด ๆ บนวงกลมกับเส้นตรง $x + y - 1$

1.1.6 หาระยะตั้งฉากระหว่างจุดปลายคอร์ดที่กำหนดให้กับจุดศูนย์กลางของวงกลม

1.2 จากโจทย์ จงหาโคออร์ดิเนตของ จุดศูนย์กลาง จุดยอดและสมการวงรีที่ผ่าน จุดเริ่มต้นและมีจุด $(\pm 1, 1)$ เป็นจุดโฟกัส

นักเรียนหาคำตอบในสิ่งที่ โจทย์ ไม่ต้องการ คือ

1.2.1 หาระยะระหว่างจุดศูนย์กลาง ถึงจุดโฟกัส

1.2.2 หาระยะระหว่างจุดศูนย์กลาง

1.2.3 หาสมการวงรีทั้งในกรณีที่มีจุดโฟกัสอยู่บนแกนที่ขนานกับแกน x และแกน y (หาสมการวงรีมา 2 สมการ)

2. ไม่สรุปคำตอบให้เป็นผลสำเร็จตามหลักคณิตศาสตร์ เช่น

2.1 ไม่กระจายให้เป็นผลสำเร็จก่อน คอบเช่น ตอบว่า

สมการวงกลม คือ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

สมการพาราโบลา คือ $(y-2)^2 = 12(x+2)$

สมการไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{3} = 1$$

อภิปรายผล

จากผลการวิจัยพบว่า ในเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์และเนื้อหาภาคตัดกรวย นักเรียนมี โหมดที่ผิดพลาดเกิดขึ้นทั้ง 4 ด้านที่ทำการศึกษา ได้แก่ ด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้ ทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ ด้านการคิดคำนวณ และด้านการตรวจสอบ การแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัย ของมหาวิทยาลัยราชภัฏวชิร (2546) และทัศนพร ศัตถ์แก้ว (2531) ที่พบว่านักเรียนมีมีโหมดที่ผิดพลาดเกิดขึ้นในเนื้อหาเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวยใน 4 ด้าน ได้แก่ ด้านการตีความ จากโจทย์ การใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติ การคิดคำนวณ การตรวจสอบ การแก้ปัญหา และจากการที่นักเรียนมีมีโหมดที่ผิดพลาดเกิดขึ้นทั้ง 4 ด้านที่ทำการศึกษา แสดงว่า นักเรียนส่วนใหญ่ขาดทักษะ ความรู้ ความเข้าใจ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับกับผลการประเมินคุณภาพ การศึกษาของสำนักงานทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ (2548) ได้ประเมินคุณภาพในการ ศึกษาของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2545, 2546 และ 2547 ระดับประเทศ พบว่า คะแนนเฉลี่ยความถนัดทางการเรียน (SAT) ในด้านของความสามารถทางการคิดคำนวณ

ของนักเรียนต่ำกว่าร้อยละ 50 ทั้ง 3 ปีการศึกษา โดยนักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยความสามารถทางการคิดคำนวณคิดเป็นร้อยละ 38.03, 38.85 และ 41.63 ตามลำดับ ส่วนคะแนนเฉลี่ยด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (GAT) พบว่านักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยปีการศึกษา 2546 และ 2547 คิดเป็นร้อยละ 33.22 และ 34.74 ตามลำดับ และสอดคล้องกับผลจากการทดสอบระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2549 ของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามหาสารคาม พบว่ามีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ ร้อยละ 29.56 ซึ่งอยู่ในระดับต่ำ (สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามหาสารคาม, 2550) สาเหตุที่นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ที่ต่ำกว่าเกณฑ์ในทุกสาระและทุกด้านที่ทำการศึกษาน่าจะเป็นเพราะวิชาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นก็จะมีความซับซ้อนในเชิงความคิด และมีลักษณะที่เป็นนามธรรมมากขึ้น จึงค่อนข้างยากและถ้าหากในการจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนเข้าใจได้และมีมีโน้ตที่ถูกต้องในวิชาคณิตศาสตร์

ข้อเสนอแนะการวิจัย

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

จากผลการวิจัยครั้งนี้ แสดงให้เห็นถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ผู้สอนควรใช้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์เหล่านั้น เป็นประโยชน์ในการจัดกระบวนการสอนหรือกิจกรรมการเรียนการสอนต่างๆ ที่ส่งเสริมหรือช่วยฝึกทักษะโดยเน้นในด้านของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเพื่อช่วยลดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกิดเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้อง อีกทั้งผู้วิจัยเห็นว่าความรู้ที่เกิดจากการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ยังมีอีกมากมาย และรอคอยให้ทำการศึกษาวิจัยกันต่อไป

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

ควรมีการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเนื้อหาอื่นๆ เพื่อเป็นข้อควรรู้สำหรับครูผู้สอนในการจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่ถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

- ทัศนภาพ คลังแก้ว. (2531). การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ่ายเอกสาร.
- นวลจิตต์ เขาวงกตพิงค์. (2537). ความถี่รวมของการเรียนการสอน. สารพัฒนาหลักสูตร 119 (ตุลาคม – ธันวาคม 2537) : 57.
- บุญเสริม ฤทธาภิรมย์. (2523). การเรียนแบบสร้างความรู้ความเข้าใจ. ประชากรศึกษา 31 (กุมภาพันธ์ 2523) : 6-17.
- เวชฤทธิ์ อังคนะภักทพชร. (2546). การสังเคราะห์ทั้ง (เวกเตอร์) ของกับบน โน้ตที่กล่าวถึงในเรื่อง ในวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ่ายเอกสาร.
- ศิริเดช สุชีวะ. (2538). การวิจัยด้วย (เวกเตอร์) ของกับบน โน้ตที่กล่าวถึงในเรื่อง ในวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย.
- สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาชลบุรี. (2550). รายงานผลการปฏิบัติงานตามแผนปฏิบัติการยุทธศาสตร์ และประเมินผลการจัดการศึกษา ปีงบประมาณ 2550. ชลบุรี: สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาชลบุรี.
- สำนักประเมินผลการศึกษา. (2548). เอกสารประกอบการสัมมนาเรื่องความคิดเห็น เรื่อง การคิดหา และประเมินผลการปฏิบัติการศึกษา ประเด็นการปฏิบัติการเรียนรู้. กรุงเทพฯ. สำนักเลขาธิการสภาการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2545). คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- สุรางค์ ไชยพรกุล. (2541). วิจัยเชิงการศึกษ. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2541.
- สุวัฒน์-ฤทธิวัฒน์. (2541). การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์. ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมศักดิ์ ไชยพันธ์. (2543). ยุทธวิธีการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ (กับการสอน). วารสารคณิตศาสตร์ 44 (พฤษภาคม – กรกฎาคม 2543) : 41.
- Brown, D.V. (1992). Using Examples And Analogies To Remediate Misconceptions In Physics: Factors Influencing Conceptual Change. *Journal Of Research In Science And Teaching* 29(1992): 17-34.
- Chai, C.M. And Ang, B.H. (1987). Identifying The Reasons Underlying Pupils Particular Errors In Simple Algebraic Expression And Equations. *Proceedings Of Fourth Southeast Asian Conference On Mathematical Education (Icme-Seams)* (June 1-3, 1987): 189-198.