ตัวดำเนินการฉายอิงระยะทางและตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป

Metric Projection Operator and Generalized Projection Operators

นรินทร์ เพชร์โรจน์

Narin Petrot

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ต.ท่าโพธิ์ อ.เมือง จ.พิษณุโลก 65000

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์หลักเพื่อกล่าวถึงความเกี่ยวข้องของตัวดำเนินการฉายอิงระยะทางและตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป โดยมุ่งเน้นไปยังความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการเหล่านั้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาคใดๆ ที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป

Abstract

This article is mainly interested in the results concerning metric projection operator and generalized projection operators. We focus to the connection of these operators on the Hilbert spaces and any uniformly convex which are uniformly smooth Banach spaces.

Keywords : metric projection operator, generalized projection operators, Hilbert space, uniformly convex Banach space, uniformly smooth Banach space

***Corresponding author.** E-mail: narinp@nu.ac.th

บทนำ

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง (metric space) สำหรับเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่าง K ของปริภูมิ (X, d) เรานิยามตัวดำเนินการ $d(\bullet, K) : X \to \mathbb{R}$ โดย

$$d(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y)$$

สำหรับทุกๆ $x \in X$ ซึ่งเรียกตัวดำเนินการดังกล่าวว่า ตัวดำเนินการวัดระยะทาง ระหว่างสมาชิก $x \in X$ ใดๆ กับเซต K เทียบกับเมตริก d และตัวดำเนินการ $P_K : X \to 2^K$ ซึ่งนิยามโดยนิยาม

$$P_K(x) = \{ z \in K : d(x,z) = d(x,K) \}$$

สำหรับทุกๆ $x \in X$ *จะเรียกว่า ตัวดำเนินการฉายอิงระยะทาง* (metric projectionoperator)

ในกรณีเมื่อ $(B, \|\bullet\|_B)$ เป็นปริภูมิบานาคใดๆ โดยที่ B^* เป็นปริภูมิคู่กันเชิงทอพอโลยีของปริภูมิ B เทียบกับนอร์ม $\|\bullet\|_B$ ในปี 1994 อัลเบอร์ (Alber, 1994) ได้แนะนำตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป $\pi_K : B^* \to K$ และ $\Pi_K : B \to K$ เมื่อ B เป็นปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูปซึ่งตัวดำเนินการทั้งสองรวมถึงตัวดำเนินการฉายอิงระยะทางได้มีบทบาทสำคัญในการประยุกต์เพื่อใช้แก้ปัญหาในแขนงต่างๆ เช่น การประมาณเพื่อแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดไม่เชิงเส้น (approximate solving nonlinear optimization problems), อสมการการแปรผัน (variational inequalities), ปัญหาจุดตรึง (fixed point problems), ปัญหาการแยก (decomposition problems) เป็นต้น ดู (Alber, 1996; Johnson, 1987; Isac, 1992; Wen & Cao, 2004)

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการศึกษาเกี่ยวกับตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไปและตัวดำเนินการฉายอิงระยะทางนั้นมีบทบาทที่สำคัญ เนื่องจากสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาวิชาต่างๆ ได้อย่างแพร่หลาย

ในกรณีที่ปริภูมิที่พิจารณาเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต B มีข้อสังเกตที่น่าสนใจเกี่ยวกับตัวดำเนินการฉายอิงระยะทางและตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไปคือ

$$P_K = \Pi_K = \pi_K = P_K \circ J^* \quad \text{------------------------}(\spadesuit)$$

เมื่อ J^* คือการส่งแบบภาวะคู่กันจาก J^* ไปยัง $2^{B^{**}}$ จากความเป็นจริงของความสัมพันธ์ (♠) บนปริภูมิฮิลเบิร์ตและจากความจริงที่ว่าทุกปริภูมิฮิลเบิร์ต B จะเป็นปริภูมิบานาค ที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูปเสมอ ซึ่งการเป็นปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูปนั้นนับว่าเป็นปริภูมิที่มีโครงสร้างที่สมบูรณ์ในเชิงของการวิเคราะห์ทางเรขาคณิต (geometrical analysis) จึงทำให้เกิดข้อปัญหาที่น่าสนใจตามมาว่าเงื่อนไขความเป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป เพียงพอสำหรับความสัมพันธ์ (♠) ในปริภูมิบานาคใดๆ หรือไม่

นิยามและความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามและความรู้พื้นฐานที่สำคัญและจำเป็นในการศึกษาข้อปัญหาข้างต้นดังต่อไปนี้

สำหรับปริภูมิบานาค $(B, \|\bullet\|_B)$ ใดๆ ให้ B^* เป็นปริภูมิคู่กันเชิงทอพอโลยีของปริภูมิ B เทียบกับนอร์ม $\|\bullet\|_B$(the topology dual space of B respective to $\|\bullet\|_B$)

<u>บทนิยาม 1</u> *การส่งภาวะคู่กัน* (duality mapping) คือ ตัวดำเนินการ $J : X \to 2^{B^*}$ ซึ่งนิยามโดย

$$J(x) = \left\{ j \in B^* : j(x) = \|j\|_{B^*} \|x\|_B = \|j\|_{B^*}^2 = \|x\|_B^2 \right\}$$

<u>บทนิยาม 2</u> จะกล่าวว่าปริภูมิบานาค B เป็น*ปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป* (uniformly convex space) ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$$

สำหรับทุก $x, y \in B$ ซึ่ง $\|x\| = \|y\| = 1$ และ $\|x - y\| \geq \varepsilon$

<u>บทนิยาม 3</u> จะกล่าวว่าปริภูมิบานาค B เป็น*ปริภูมิปรับเรียบแบบเอกรูป* (uniformly smooth space) ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} \leq 1 + \varepsilon \|y\|$$

สำหรับทุก $x, y \in B$ ซึ่ง $\|x\| = 1, \|y\| \leq \delta$

ต่อไปจะกล่าวถึงสมบัติสะท้อนของปริภูมิบานาค ซึ่งต้องอาศัยความจริงต่อไปนี้

ให้ B ปริภูมิบานาคใดๆ ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in B$ นิยามการส่ง $\gamma_x : B^* \to \mathbb{R}$ โดย

$$\gamma_x(f) = f(x)$$

สำหรับทุกๆ $f \in B^*$ แล้วจะได้ว่า $\gamma_x \in B^{**}$ และ $\|x\|_B = \|\gamma_x\|_{B^{**}}$ (สุเทพ, 2548)

<u>บทนิยาม 4</u> จะกล่าวว่าปริภูมิบานาค B เป็น*ปริภูมิสะท้อน* (reflexive space) ถ้าการส่ง $Q : B \to B^{**}$ ที่นิยามโดย

$$Q(x) = \gamma_x$$

สำหรับทุก $x \in B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (ในกรณีนี้จะใช้สัญลักษณ์ $B \cong B^{**}$)

<u>ทฤษฎีบท 5</u> ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้าปริภูมิบานาค B มีสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูป หรือปรับเรียบแบบเอกรูปแล้วปริภูมิ B จะมีสมบัติสะท้อน

(2) ทุกๆ ปริภูมิฮิลเบิร์ต B ใดๆ จะเป็นปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป

(3) สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ต B จะได้ว่า $B \cong B^*$ และการส่งภาวะคู่กัน $J : B \to 2^{B^*}$ คือฟังก์ชันเอกลักษณ์บน B

สำหรับความรู้พื้นฐานเพิ่มเติมเกี่ยวกับการสมบัติเบื้องต้นและการประยุกต์บนปริภูมิบานาคและปริภูมิฮิลเบิร์ตผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก สมยศ พลับเที่ยง (2548) และ สุเทพ สวนใต้ (2548) เป็นต้น

ตัวดำเนินการฉายอิงระยะทางและตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป

ให้ B เป็นปริภูมิบานาคใดๆ และเนื่องจากการส่งภาวะคู่กัน J เป็นการส่งจาก B ไปยัง 2^{B^*} ดังนั้นในทำนองเดียวกันเราจะให้ J^* เป็นการส่งภาวะคู่กันจาก B^* ไปยัง $2^{B^{**}}$ (นั่นคือ $J^* : B^* \to 2^{B^{**}}$) จึงทำให้ได้ว่าในกรณีที่ B เป็นปริภูมิสะท้อน จะเห็นว่า J^* เป็นการส่งภาวะคู่กันจาก B^* ไปยัง 2^B ซึ่งในกรณีนี้เราสามารถพิจารณาตัวดำเนินการ $P_K \circ J^* : B^* \to K$ ได้

<u>*ข้อสังเกต 6*</u> สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ต B ใดๆ เราได้ว่า B จะเป็นปริภูมิสะท้อน และ $B^* = B,\ J = I_B$ ดังนั้น $J^* = J = I_B$ จึงทำให้ได้ว่า $P_K \circ J^* = P_K$

ดังนั้นจากข้อสังเกต 6 จึงกล่าวได้ว่าตัวดำเนินการ $P_K \circ J^*$ เป็นตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไปของตัวดำเนินการ ฉายอิงระยะทาง P_K บนปริภูมิบานาคใดๆ ที่มีสมบัติสะท้อน

ลำดับต่อไปจะกล่าวถึงนิยามของตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไปในอีกลักษณะหนึ่ง

<u>บทนิยาม 7</u> (Alber, 1994) ให้ B เป็นปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปริภูมิปรับเรียบแบบเอกรูป และ K เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ B ตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป $\pi_K : B^* \to K$ จะนิยามโดย

$$\pi_K(f) = y$$

สำหรับทุก $f \in B^*$ เมื่อ y เป็นสมาชิกใน K ที่ทำให้ $V(f,y) = \inf_{x \in K} V(f,x)$ และการส่ง $V : B^* \times B \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$V(f,x) = \|f\|_{B^*}^2 - 2\langle f, x\rangle + \|x\|_B^2$$

<u>*หมายเหตุ 8*</u> จากบทนิยาม 7 เราจะกล่าวว่า $y = \pi_K(f) \in K$ เป็นภาพฉายวางนัยทั่วไป (generalized projection) ของสมาชิก $f \in B^*$ ไปบน K ภายใต้ตัวดำเนินการ π_K

<u>บทนิยาม 9</u> (Alber, 1994) ให้ B เป็นปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปริภูมิปรับเรียบแบบเอกรูป และ K เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ B ตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป $\Pi_K : B \to K$ จะนิยามโดย

$$\Pi_K(x) = y$$

สำหรับทุก $x \in B$ เมื่อ y เป็นสมาชิกใน K ที่ทำให้ $W(x,y) = \inf_{z \in K} W(x,z)$ และการส่ง $W : B \times B \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$W(x,y) = \|x\|_B^2 - 2\langle Jx, y\rangle + \|y\|_B^2$$

<u>*หมายเหตุ 10*</u> จากบทนิยาม 9 เราจะกล่าวว่า $y = \Pi_K(x) \in K$ เป็นภาพฉายวางนัยทั่วไปของสมาชิก $x \in B$ ไปบน K ภายใต้ตัวดำเนินการ Π_K

สำหรับความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับตัวดำเนินการ π_K , Π_K . $P_K \circ J^*$ และ P_K ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสาร Alber (1994) และ Li (2005) เป็นต้น

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการฉาย

1. ความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการฉายบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

สังเกตว่าถ้า B เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตแล้ว $V(x,y)=\|x-y\|_B^2=W(x,y)$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาแต่ละเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่าง K ของปริภูมิ B จากบทนิยาม 7 และ บทนิยาม 6 ประกอบกับทฤษฎีบท 5(3) และ ข้อสังเกต 6 จะได้ว่า

$$P_K=\Pi_K=\pi_K=P_K\circ J^* \quad \text{------------------------}(\spadesuit)$$

นั่นคือตัวดำเนินการฉายอิงระยะทาง P_K และตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป π_K, Π_K, $P_K\circ J^*$ เป็นตัวดำเนินการเดียวกันบนปริภูมิฮิลเบิร์ตใดๆ

2. ความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการฉายบนปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป

2.1 ตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป π_K และ $P_K\circ J^*$

ในการพิจารณาความสัมพันธ์ดังกล่าวมีสิ่งที่ควรทราบเพิ่มเติมดังนี้

ให้ ℓ^0 แทนเซตของลำดับของจำนวนจริงทั้งหมด สำหรับแต่ละ $1<p<\infty$ เรานิยามปริภูมิเวกเตอร์ $\ell_p\subset\ell^0$ ภายใต้การบวกและคูณปกติบนเซต

$$\ell_p=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in\ell^0:\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty\right\}$$

และนิยามนอร์ม $\|\cdot\|_{\ell_p}:\ell_p\to\mathbb{R}$ บนปริภูมิดังกล่าวโดย

$$\|x\|_{\ell_p}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

สำหรับทุกๆ $x\in\ell_p$ แล้วจะได้ว่า $\left(\ell_p,\|\cdot\|_{\ell_p}\right)$ เป็นปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป โดยที่ $\ell_p^*=\ell_q$ เมื่อ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ และในกรณีที่ $p=2$ จะได้ว่า $\left(\ell_2,\|\cdot\|_{\ell_2}\right)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต (สุเทพ, 2548)

สำหรับแต่ละ $1<p<\infty$ เราให้

$$\ell_p^+=\{x=(x_1,x_2,x_3,...,x_n,...)\in\ell_p:x_n\ge 0,n=1,2,3,...\}$$

และสำหรับแต่ละ $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...,\varphi_n,...)\in\ell_q$ เราจะนิยาม $\varphi^+\in\ell_q$ โดย

$$\varphi_n^+=\begin{cases}\varphi_n, & \varphi_n>0\\ 0, & \varphi_n\le 0\end{cases}$$

ในปี 2007 Y. Alber ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 11 (Alber, 2007) ถ้า $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...,\varphi_n,...)\in\ell_q$ เป็นสมาชิกใดๆ แล้ว $P_{\ell_p^+}\circ J^*(\varphi)=\pi_{\ell_p^+}\varphi$ ก็ต่อเมื่อ $\|\varphi^+\|_q=\|\varphi\|_q$

ข้อสังเกต 12 ถ้า q เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...,\varphi_n,...)\in\ell_q$ โดยที่มีบาง $j\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $\varphi_j<0$ แล้วจากบทนิยามของ $\left(\ell_q,\|\cdot\|_{\ell_q}\right)$ จะได้ว่า $\|\varphi^+\|_q\neq\|\varphi\|_q$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 11 จึงได้ว่า $P_{\ell_p^+}\circ J^*(\varphi)\neq\pi_{\ell_p^+}\varphi$ นั่นคือ $P_{\ell_p^+}\circ J^*\neq\pi_{\ell_p^+}$

จากข้อสังเกต 12 จะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการ π_K และ $P_K\circ J^*$ ในความสัมพันธ์ ($\spadesuit$) อาจไม่เป็นจริงบนปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์ แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป

2.2 ตัวดำเนินการฉายอิงระยะทาง P_K และตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป Π_K

ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการทั้งสองจะอาศัยทฤษฎีบทที่สำคัญคือ

ทฤษฎีบท 13 (Alber, 1996) ถ้า B เป็นปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป แล้วจะได้ว่า

(1) ตัวดำเนินการ $P_K:B\to K$, $\Pi_K:B\to K$ และ $\pi_K:B^*\to K$ เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยว (single valued function)

(2) $\pi_K=\Pi_K\circ J^*$ และ $\pi_K\circ J=\Pi_K$

ดังนั้นภายใต้เงื่อนไขการเป็นปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป และจากกรณีความสัมพันธ์ของตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป π_K และ $P_K\circ J^*$ บนเซตย่อยคอนเวกซ์ K ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค B ซึ่งทำให้ $P_K\circ J^*\neq\pi_K$ โดยทฤษฎีบท 13 จึงได้ว่า $P_K\neq\pi_K\circ J=\Pi_K$ นั่นคือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการฉายอิงระยะทาง P_K และตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป Π_K ในความสัมพันธ์ ($\spadesuit$) อาจไม่เป็นจริงบนปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์ แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูป

สรุปผล

ถ้า B ปริภูมิฮิลเบิร์ต และ K เซตย่อยคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างใดๆ ของปริภูมิ B จะได้ว่าตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไป π_K, Π_K, $P_K \circ J^*$ และตัวดำเนินการฉายอิงระยะทาง P_K เป็นตัวดำเนินการที่เท่ากัน (นั่นคือ $P_K(x) = \Pi_K(x) = \pi_K(x) = P_K \circ J^*(x)$ สำหรับทุก $x \in B$) แต่อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์ดังกล่าวไม่จำเป็นต้องเป็นจริงสำหรับเซตย่อยคอนเวกซ์ B ใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างบนปริภูมิบานาคทั่วไป และยิ่งไปกว่านั้นโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการดังกล่าวบนปริภูมิบานาคที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูปยังพบว่าความสัมพันธ์ที่เท่ากันดังกล่าวระหว่างตัวดำเนินการยังคงไม่เป็นจริง จึงสรุปได้ว่าการมีคุณสมบัติคอนเวกซ์แบบเอกรูปและปรับเรียบแบบเอกรูปของปริภูมิบานาคใดๆ ไม่เพียงพอที่จะทำให้ตัวดำเนินการฉายทั่วไปรวมถึงตัวดำเนินการฉายอิงระยะทางเป็นตัวดำเนินการที่เท่ากันได้ ดังนั้นในการศึกษาเกี่ยวกับตัวดำเนินการฉายวางนัยทั่วไปบนปริภูมิบานาคที่ไม่เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตจึงเป็นการศึกษาบนตัวดำเนินการที่แตกต่างกัน และถือเป็นแนวทางใหม่ที่สร้างความหลากหลายในเชิงทฤษฎีเกี่ยวกับตัวดำเนินการฉายที่เป็นประโยชน์ เพราะจะส่งผลทำให้เกิดการประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวางในแขนงต่างๆ ดังที่ได้กล่าวไว้ในตอนต้นยิ่งขึ้นต่อไป

เอกสารอ้างอิง

สมยศ พลับเที่ยง. (2548). *ทฤษฎีจุดตรึงและการประยุกต์.* พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยนเรศวร.

สุเทพ สวนใต้. (2548). *ทฤษฎีบทปริภูมิบานาค.* เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

Alber, Ya. (2007). The connection between the metric and generalized projection operators in Banach spaces. *Acta Mathematica Sinica, English Series, 23*(6), 1109-1120.

____. (1996). Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and application. In A. Kartsatos (Ed.), *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type* (pp.15-50) Marcel Dekker.

____. (1994). Generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications, Functional Differential Equations, *Proceedings of the Israel Seminar in Ariel, 1,* 1-21.

Johnson, G. A. (1987). Nonconvex set which has the unique nearest point property. *J. Approx. Theory, 51,* 289-332.

Isac, G. (1992). *Complementarity problem, Lecture Notes in Math.* New York: 1528, Spring-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Li, J. L. (2005). The generalized projection operator on reflexive Banach spaces and its applications. *J. Math. Anal. Appl., 306,* 55-71.

Wen, S., & Cao, Z. J. (2004). The generalized decomposition theorem in Banach spaces and its applications. *Journal of Approximation Theory, 129*(2), 167-181.