สมบัติจุดตรึงและค่าคงที่เรขาคณิตในปริภูมิบานาค

The fixed point property and geometric constants in Banach spaces

อรรถพล แก้วขาว

ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยบูรพา

ชลบุรี 20131

บทคัดย่อ

ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์และค่าคงที่เจมส์ถูกสร้างขึ้นเพื่อเป็นเครื่องมือในการศึกษาสมบัติโครงสร้างปกติและสมบัติจุดตรึงในปริภูมิบานาค เงื่อนไขที่เพียงพอบนค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์และค่าคงที่เจมส์สำหรับสมบัติโครงสร้างปกติและสำหรับสมบัติจุดตรึงถูกศึกษาและพัฒนาเพื่อให้ได้ผลสรุปที่ดีที่สุด

คำสำคัญ : สมบัติจุดตรึง, โครงสร้างปกติ, ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์, ค่าคงที่เจมส์

Abstract

The Jordan von-Neumann constant and the James constant were constructed for studying normal structure and the fixed point property in Banach spaces. The sufficient conditions for normal structure and the fixed point property concerning to the constants were studied and developed.

Keywords : the fixed point property, normal structure, Jordan von-Neumann constant, James constant

บทนำ

ปัญหาต่างๆ ในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของตัวแบบ (model) ทางคณิตศาสตร์หรือระบบสมการต่างๆ สิ่งสำคัญที่เราต้องการทราบจากระบบสมการ คือ การมีคำตอบของระบบสมการ (existence) และ การสร้างระเบียบวิธีเพื่อประมาณค่าคำตอบของระบบสมการ ทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) เป็นเครื่องมือที่สำคัญและมีประสิทธิภาพในการศึกษาปัญหาดังกล่าวข้างต้น จากความสำคัญนี้ได้มีการนำทฤษฎีจุดตรึงไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตัวอย่างเช่น Theory of Operators. Control Theory. Theory of Equations, Mathematical Economics เป็นต้น

ทฤษฎีบทจุดตรึงที่สำคัญคือ หลักการส่งหดตัวของบานาค (Banach contraction napping principle) และ ทฤษฎีบทจุดตรึงของชาวเดอร์-ตียโชนอฟ (Schauder-Tychonoff fixed point theorem) ถึงแม้ว่าทฤษฎีบทที่สำคัญทั้งสองสามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางในวงวิชาการ แต่ผลสรุปของทฤษฎีบทดังกล่าวไม่ครอบคลุมมาถึงการส่งไม่ขยาย (nonexpansive mapping) บนปริภูมิบานาค (Banach space)

ในปี ค.ศ. 1965 Kirk ได้พิสูจน์ว่า ทุกการส่งไม่ขยายบนเซตย่อยปิด นูน และมีขอบเขต (closed convex and bounded subset) ของปริภูมิบานาคที่สะท้อน (reflexive Banach space) และมีโครงสร้างปกติ (normal structure) จะมีจุดตรึงเสมอ (Kirk. 1965)

จากทฤษฎีบทของ Kirk จะเห็นว่าสมบัติโครงสร้างปกติ ซึ่งเป็นสมบัติทางเราขาคณิต (geometric property) เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) สำหรับการมีจุดตรึงของการส่งไม่ขยาย

ตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา ได้มีงานวิจัยเพื่อการศึกษาสมบัติโครงสร้างปกติและการมีจุดตรึงของการส่งไม่ขยายที่เป็นผลงานพื้นฐาน (basic research) และสร้างองค์ความรู้ใหม่ (body of knowledge) สำหรับการอ้างอิงที่มีคุณภาพ (valuable citation) และได้รับการตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติที่เป็นที่ยอมรับด้วยค่า impact factor ที่สูง (สำหรับสาขาคณิตศาสตร์) ตัวอย่างเช่น Journal of the American Mathematical Society. Journal of Functional Analysis. Journal of London Mathematical Society. Nonlinear Analysis. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Journal of Computer and Mathematics with Applications เป็นต้น

เครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิบานาคคือ ค่าคงที่เรขาคณิต (geometric constant) ที่มีความสัมพันธ์กับสมบัติโครงสร้างปกติและการมีจุดตรึงของการส่งบนปริภูมิบานาค ค่าคงที่เรขาคณิตที่สำคัญและจะกล่าวถึงในบทความนี้คือ

- ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ (Jordan von-Neumann constant) ของปริภูมิบานาค สร้างโดย Clarkson ในปี 1973
- ค่าคงที่เจมส์ (James constant) ของปริภูมิบานาค สร้างโดย Gao และ Lau ในปี ค.ศ. 1990

สมบัติจุดตรึงและโครงสร้างปกติ

(the fixed point property and normal structure)

ให้ $T : X \to X$ เป็นการส่งใดๆ บนเซต X จะกล่าวว่า T มีจุดตรึง (fixed point) ถ้ามีสมาชิก $x \in X$ ที่ $T(x) = x$

ทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิมิติอนันต์ (infinite dimension space) ที่มีประโยชน์และเป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางคือ หลักการส่งหดตัวของบานาค (Banach contraction mapping principle) และทฤษฎีบทจุดตรึงของชาวเดอร์-ตียโชนอฟ (Schauder-Tychonoff fixed point theorem)

ทฤษฎีบท 1 (Banach, 1922) (Banach contraction mapping principle) ให้ X, d เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric space) และ $T : X \rightarrow X$ ถ้า T เป็นการส่งแบบหดตัว (contraction) นั่นคือ มีจำนวนจริง $k \in (0,1)$ ที่ $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ สำหรับทุกสมาชิก $x, y \in X$ ดังนั้น T จะมีจุดตรึงและมีเพียงจุดเดียวเท่านั้น (unique)

ทฤษฎีบท 2 (Schauder, 1930) (Schauder-Tychonoff fixed point theorem) ให้ C เป็นสับเซตที่กระชับและนูน (compact convex subset) ของปริภูมิเวกเตอร์เชิงโทโพโลยี (topological vector space) ดังนั้นทุกการส่งต่อเนื่อง (continuous mapping) $T : C \rightarrow C$ จะมีจุดตรึง

ในทฤษฎีบท 1 จะเห็นว่าเงื่อนไขการเป็นการส่งแบบหดตัวของ T เป็นเงื่อนไขที่เข้ม (strong) ในขณะที่เงื่อนไขบนโดเมน X คือการเป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์เป็นเงื่อนไขที่อ่อน (weak)

ในทางตรงกันข้าม ในทฤษฎีบท 2 เงื่อนไขที่อ่อนจะอยู่ที่การส่ง T คือการส่งที่ต่อเนื่อง ในขณะที่เงื่อนไขบนโดเมน C คือการเป็นสับเซตที่กระชับและนูน เป็นเงื่อนไขที่เข้มมาก

เราสนใจปัญหาที่อยู่ตรงกลางทฤษฎีบททั้งสองข้างบน กล่าวคือ จะพิจารณาโดเมน C ในปริภูมิบานาค X และการส่ง $T : C \rightarrow C$ ที่มีสมบัติ $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ซึ่งจะเรียกการส่ง T ว่าเป็นการส่งไม่ขยาย (nonexpansive mapping)

เราจะกล่าวว่าปริภูมิบานาค X มีสมบัติจุดตรึง (the fixed point property) ถ้า ทุกการส่งไม่ขยายบนเซตย่อยที่กระชับแบบอ่อนและนูน (weakly compact convex subset) ของ X มีจุดตรึง

คำถามที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจหลังจากที่ได้นิยามสมบัติจุดตรึงแล้วคือ ทุกปริภูมิบานาค X มีสมบัติจุดตรึงหรือไม่

ทฤษฎีบท 3 (Alspach, 1981) $L_1(\mu)$ ไม่มีสมบัติจุดตรึง

ปัญหาที่เราจะศึกษาคือ เงื่อนไขอะไรบน X ที่เพียงพอ (sufficient) สำหรับสมบัติจุดตรึงของ X ตั้งแต่นี้เป็นต้นไป ให้ X เป็นปริภูมิบานาค สำหรับเซตย่อย A ของ X และ $x \in A$ กำหนด

$$r(x, A) = \sup\{\|x-y\| : y \in A\}$$

$$r(A) = \inf\{r(x, A) : x \in A\}$$

$$\text{diam}(A) = \sup\{r(x, A) : x \in A\}$$

ตอนนี้เราสามารถนิยามสมบัติโครงสร้างปกติได้แล้ว ดังนี้

บทนิยาม 4 (Brodskii & Milman, 1948) ปริภูมิบานาค X จะมีโครงสร้างปกติ ถ้า ทุกเซตย่อย A ที่นูนปิด และมีขอบเขต (bounded closed convex subset) จะสอดคล้อง $r(A) < \text{diam}(A)$ เมื่อไหร่ก็ตามที่ $\text{diam}(A) > 0$

เราทราบว่าปริภูมิฮิลเบิร์ตมีโครงสร้างปกติ

ทฤษฎีบท 5 (Brodskii & Milman, 1948)
ถ้า X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้ว X จะมีโครงสร้างปกติ

ข้อสรุปข้างล่างนี้เป็นข้อสรุปที่มีชื่อเสียงมากและถูกค้นพบโดย Kirk ในปี 1965

ทฤษฎีบท 6 (Kirk, 1965) (Kirk fixed point theorem) ถ้า X มีโครงสร้างปกติแล้ว X จะมีสมบัติจุดตรึง

ตั้งแต่ Kirk ค้นพบทฤษฎีบท 6 สมบัติทางเรขาคณิต (geometric property) และค่าคงที่ทางเรขาคณิต (geometric constant) ต่างๆ ของปริภูมิบานาคได้ถูกสร้างและศึกษา เพื่อหาเงื่อนไขบนค่าคงที่เหล่านั้นที่เพียงพอสำหรับสมบัติโครงสร้างปกติและสมบัติจุดตรึงของปริภูมิ ผู้อ่านสามารถหาข้อมูลเพิ่มเติมได้จาก (Goebel & Kirk, 1990)

ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ (Jordan von-Neumann constant)

ให้ C และ M เป็นค่าคงที่ ที่น้อยที่สุดและที่มากที่สุด ตามลำดับ ที่

$$M \le \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \le C$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ ที่ $(x, y) \neq (0, 0)$ (1)

ได้ข้อสังเกตว่า ถ้า x, y เป็นสมาชิกของ X ที่ $(x, y) \neq (0, 0)$ แล้ว

$$\frac{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2} = \frac{\left\|\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right\|^2}{2\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)} \quad (2)$$

โดยอสมการ (1) ได้ว่าเศษส่วนทางขวามือในสมการ (2) ต้องไม่เกิน C ดังนั้น

$$\frac{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2} \le C$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{C} < \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ ที่ $(x, y) \neq (0, 0)$ (3)

จากอสมการ (3) และ M เป็นคาคงที่ที่มากที่สุดที่สอดคล้องอสมการ (1) ดังนั้น $M \ge \frac{1}{C}$ และในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถแสดงได้ว่า $M \le \frac{1}{C}$ ดังนั้น $M = \frac{1}{C}$

จากแนวคิดดังกล่าว สามารถนิยามค่าคงที่ของปริภูมิบานาค X ได้ดังนี้

ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ (Jordan von-Neumann constant) $C_{NJ}(X)$ ของ X ซึ่งสร้างโดย Clarkson (Clarkson, 1973) คือค่าคงที่ C ที่น้อยที่สุด ที่

$$\frac{1}{C} \le \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \le C$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ ที่ $(x, y) \neq (0, 0)$

ดังนั้น

$$C_{NJ}(X)=\sup\left\{\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} : \text{for all } x, y\in X, (x,y)\neq(0,0)\right\}$$

โดยอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangular inequality) และสมบัติของนอร์ม $\|\cdot\|$ เราพบว่า $C_{NJ}(X)$ มีขอบเขตดังนี้

$$1 \le C_{NJ}(X) \le 2$$

เป็นที่ทราบกันดีว่าเงื่อนไขกฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law) ของปริภูมิบานาค X ซึ่งนิยามโดย

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับ ปริภูมิบานาค X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้นเราได้ผลสรุปดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7 $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ก็ต่อเมื่อ $C_{NJ}(X) = 1$

ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ของ X และของปริภูมิคู่กัน (dual space) X^* ยังมีค่าเท่ากันอีกด้วย

ทฤษฎีบท 8 (Clarkson, 1973) $C_{NJ}(X) = C_{NJ}(X^*)$

นอกจากปริภูมิฮิลเบิร์ตแล้ว ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ ของปริภูมิ $L_p(\mu)$ ยังได้ถูกคำนวณไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 9 (Clarkson. 1973) ถ้า $X = L_p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$ ได้ว่า

$$C_{NJ}\left(L_p(\mu)\right) = 2^{2/r-1}$$

เมื่อ $r = \min\left\{p, \dfrac{p}{p-1}\right\}$

สิ่งที่น่าสนใจประการหนึ่งก็คือ ค่าคงที่ $C_{NJ}(X)$ ของ X มีความเกี่ยวข้องกับสมบัติโครงสร้างปกติและสมบัติจุดตรึงอย่างไรบ้าง ตัวอย่างเช่น ในกรณี ถ้า $C_{NJ}(X) = 1$ ได้ว่า X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และทฤษฎีบท 5 ทำให้สรุปได้ว่า X มีโครงสร้างปกติ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทจุดตรึงของ Kirk สามารถสรุปได้ว่า ปริภูมิ X มีสมบัติจุดตรึงและจากความจริงที่ว่า $C_{NJ}(X) = C_{NJ}(X^*)$ ทำให้ได้ข้อสรุปดังนี้

ทฤษฎีบท 10 $C_{NJ}(X) = 1 \Rightarrow X$ และ X^* มีโครงสร้างปกติ $\Rightarrow X$ และ X^* มีสมบัติจุดตรึง

นักคณิตศาสตร์ที่วิจัยทางด้านจุดตรึงรวมถึงผู้เขียนบทความได้ศึกษาและวิจัยเพื่อที่จะขยายขอบเขตของค่าคงที่ $C_{NJ}(X)$ ในทฤษฎีบท 10 จาก 1 เป็นตัวเลขอื่นที่มากกว่า 1 ทำให้มีงานวิจัยที่ได้ผลสรุปและพัฒนาความรู้เกี่ยวกับค่าคงที่ $C_{NJ}(X)$ ดังต่อไปนี้

ในปี ค.ศ. 2001 Kato *et al.* (2001) (Kato *et al.* 2001) ได้พิสูจน์ว่า

$C_{NJ}(X) < 1.25 \Rightarrow X$ และ X^* มีโครงสร้างปกติ

ในปี ค.ศ. 2003 ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา และคณะ (Dhompongsa *et al.*. 2003) ได้ศึกษาวิจัยจนได้ข้อสรุปที่ดีกว่าของ Kato และคณะ ดังนี้

$C_{NJ}(X) < \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \approx 1.309 \Rightarrow X$ และ X^* มีโครงสร้างปกติ

ในปี ค.ศ. 2006 มีผลงานวิจัยสองชิ้นซึ่งมีระเบียบวิธีการพิสูจน์ที่แตกต่างกันคือ ผลงานวิจัยของศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ และผู้เขียนบทความ (Dhompongsa & Kaewkhao. 2006) และผลงานวิจัยของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สาธิต แซ่จึง (Saejung. 2006) ได้ศึกษาวิจัยจนได้ขอบเขตใหม่ของค่าคงที่ $C_{NJ}(X)$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 11
$C_{NJ}(X) < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.366 \Rightarrow X$ และ X^* มีโครงสร้างปกติ

ในปี ค.ศ. 2006 Garcia-Falset และคณะ ได้พิสูจน์ว่า

ทฤษฎีบท 12 $C_{NJ}(X) < 2 \Rightarrow X$ และ X^* มีสมบัติจุดตรึง

เนื่องจากขอบเขตบนของค่าคงที่ $C_{NJ}(X)$ คือ 2 และมีปริภูมิบานาคที่ไม่มีสมบัติจุดตรึง (ทฤษฎีบท 3) ดังนั้นเงื่อนไข $C_{NJ}(X) < 2$ ในทฤษฎีบท 12 เป็นเงื่อนไขที่ดีที่สุด (sharp) แล้วที่เพียงพอสำหรับสมบัติจุดตรึงของปริภูมิ X

ปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ที่วิจัยทางด้านจุดตรึงได้ศึกษาวิจัยเพื่อที่จะหาผลสรุปที่ดีกว่าผลสรุปในทฤษฎีบท 11 หรือในทางกลับกัน พยายามที่จะแสดงว่า เงื่อนไข $C_{NJ}(X) < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ ในทฤษฎีบท 11 เป็นเงื่อนไขที่ดีที่สุดแล้วที่เพียงพอสำหรับสมบัติโครงสร้างปกติของปริภูมิ X

อย่างไรก็ตามจนถึงปัจจุบันยังไม่มีผลสรุปที่ดีกว่าผลสรุปในทฤษฎีบท 11 และยังไม่มีข้อสรุปที่ว่า ผลสรุปในทฤษฎีบท 11 ดีที่สุดแล้ว

ค่าคงที่เจมส์ (James constant)

ปริภูมิบานาค $(X, \|\cdot\|)$ จะเรียกว่าเป็น uniformly non-square (James. 1964) ถ้ามีจำนวนจริง $\delta \in (0, 1)$ ที่

$\frac{1}{2}\|x+y\| < 1-\delta$ หรือ $\frac{1}{2}\|x-y\| < 1-\delta$ สำหรับทุกสมาชิก $x, y \in X$ ที่ $\|x\| = \|y\| = 1$

ในปี ค.ศ. 1990 Gao and Lau (Gao & Lau, 1990)ได้สร้างค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับความเป็น uniformly non-square ของปริภูมิบานาค X ดังนี้

$J(X) = \sup\{\|x+y\| \wedge \|x-y\| : x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1\}$ เมื่อ

$\|x+y\| \wedge \|x-y\| = \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$

และเรียกค่าคงที่นี้ว่า ค่าคงที่เจมส์ (James constant) และเห็นได้ชัดว่า

$J(X) < 2 \Leftrightarrow X$ เป็นปริภูมิ uniformly non-square

อสมการอิงรูปสามเหลี่ยมของ $\|\cdot\|$ ทำให้สรุปได้ว่า $J(X) \le 2$ ในทางกลับกันได้ว่า $\sqrt{2} \le J(X)$ (Casini, 1986) ดังนั้น สำหรับปริภูมิบานาค X

$$\sqrt{2} \le J(X) \le 2$$

ค่าที่ถูกต้องของค่าคงที่เจมส์ของปริภูมิบานาคที่สำคัญๆ ได้ถูกคำนวณไว้ดังนี้ (Casini, 1986; Gao & Lau, 1990)

1. $J(L_1) = J(l_1) = J(l_\infty) = 2$
2. สำหรับ $1 < p < \infty$, $J(l_p) = \max\left\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{1-\frac{1}{p}}\right\}$

ในปี ค.ศ. 1991 Gao and Lau (Gao & Lau, 1991) ได้ทำการศึกษาวิจัยต่อเนื่อง จนได้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับสมบัติโครงสร้างปกติของปริภูมิ X

ทฤษฎีบท 13 (Gao & Lau, 1991)

$J(X) < 1.5 \Rightarrow X$ มีโครงสร้างปกติ

ต่อมาในปี ค.ศ. 2003 ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา และคณะ (มีผู้เขียนบทความวิจัยรวมอยู่ด้วย) ได้ศึกษาและสร้างระเบียบวิธีวิจัยจนได้ผลสรุปที่ดีกว่าทฤษฎีบท 13 ดังนี้

ทฤษฎีบท 14 (Dhompongsa *et al.*, 2003)

$J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \Rightarrow X$ มีโครงสร้างปกติ

ข้อสรุปข้างบนเป็นที่น่าสนใจอย่างยิ่งเพราะว่าขอบเขตบนของค่าคงที่ $J(X)$ ในทฤษฎีบท 14 คือ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ เป็นสัดส่วนทอง (golden ratio)[1]

ด้วยความมหัศจรรย์ของสัดส่วนทองจึงมีข้อคาดเดา (conjecture) ว่า

ข้อคาดเดา 15 (Dhompongsa *et al.*, 2003) เงื่อนไข $J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ เป็นเงื่อนไขที่ดีที่สุดที่เพียงพอสำหรับสมบัติโครงสร้างปกติของปริภูมิ X

ทฤษฎีบท 14 และทฤษฎีบทจุดตรึงของ Kirk สรุปได้ว่า เงื่อนไข $J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ เพียงพอสำหรับสมบัติจุดตรึงของ X แต่อย่างไรก็ตามเงื่อนไขดังกล่าวยังไม่ดีที่สุดที่เพียงพอสำหรับสมบัติจุดตรึงของปริภูมิ X

ค่าคงที่เจมส์และค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์มีความสัมพันธ์กันดังนี้

---

[1] ผู้อ่านสามารถหาข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับสัดส่วนทองได้จาก http://www.vcharkarn.com/include/article/showarticle.php/showarticle.php?Aid=328

ทฤษฎีบท 16 (Kato *et al*. 2001) สำหรับปริภูมิบานาค $(X, \|\cdot\|)$ เราได้ว่า

$$\frac{J(X)^2}{2} \le C_{NJ}(X) \le \frac{J(X)^2}{(J(X)-1)^2+1}$$

ยิ่งไปกว่านั้นได้ว่า

$$C_{NJ}(X) < 2 \Leftrightarrow J(X) < 2$$

ดังนั้น โดยอาศัยทฤษฎีบท 12 และทฤษฎีบท 16 เราได้ว่า เงื่อนไข $J(X) < 2$ เป็นเงื่อนไขที่ดีที่สุดที่เพียงพอสำหรับสมบัติจุดตรึงของปริภูมิ X

ทฤษฎีบท 17 (Garcia-Falset *et al*. 2006)
$J(X) < 2 \Leftrightarrow C_{NJ}(X) < 2 \Rightarrow X$ และ X^* มีสมบัติจุดตรึง

บทสรุปและปัญหาเปิด (conclusion and open problems)

ปัจจุบันนี้ ผลสรุปที่ดีที่สุด (ที่พิสูจน์ได้) ที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขบนค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์และค่าคงที่เจมส์ และสมบัติโครงสร้างปกติ คือผลสรุปดังต่อไปนี้

$$C_{NJ}(X) < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow X \text{ และ } X^*$$

มีโครงสร้างปกติ

$$J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow X \text{ มีโครงสร้างปกติ}$$

สำหรับข้อสรุปในทฤษฎีบท 12 และ 17 ที่ว่า $J(X) < 2 \Leftrightarrow C_{NJ}(X) < 2 \Rightarrow X$ และ X^* มีสมบัติจุดตรึงเป็นข้อสรุปที่ดีที่สุดแล้ว

ต่อไปจะกล่าวถึงปัญหาเปิด (open problem) ที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์และที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่เจมส์ ดังต่อไปนี้

ปัญหา 1 สามารถปรับปรุงขอบเขตบนของค่า $C_{NJ}(X)$ ที่ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ในทฤษฎีบท 11 เป็นจำนวนอื่นที่มากกว่าได้หรือไม่

ในทำนองเดียวกับปัญหา 1 เราสนใจว่า

ปัญหา 2 สามารถปรับปรุงขอบเขตบนของค่า $J(X)$ ที่ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ในทฤษฎีบท 14 เป็นจำนวนอื่นที่มากกว่าได้หรือไม่

ในทางกลับกัน ถ้าต้องการแสดงว่าผลสรุปในทฤษฎีบท 11 และในทฤษฎีบท 14 ดีที่สุดแล้ว ต้องทำดังนี้

ปัญหา 3 สร้างปริภูมิบานาค X ที่ไม่มีโครงสร้างปกติและค่าคงที่ $C_{NJ}(X) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ปัญหา 4 สร้างปริภูมิบานาค X ที่ไม่มีโครงสร้างปกติและค่าคงที่ $J(X) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bynum (Bynum, 1972) ได้สร้างปริภูมิบานาคที่สำคัญปริภูมิหนึ่งซึ่งต่อมาถูกเรียกว่า ปริภูมิ Bynum นิยามดังนี้ สำหรับ $1 \le p, q \le \infty$ ปริภูมิ Bynum คือปริภูมิ l_p กับนอร์ม $\|\cdot\|_{p,q}$

กำหนดโดย

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\|x^+\|_p^q + \|x^-\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty; \\ \max\left\{\|x^+\|_p, \|x^-\|_p\right\}, & q = \infty \end{cases}$$

เมื่อ x^+ และ x^- เป็นส่วนบวก (positive part) และส่วนลบ (negative part) ของ $x \in l_p$ ตามลำดับ

Bynum ยังได้แสดงว่า ปริภูมิ Bynum ไม่มีโครงสร้างปกติ ดังนั้นแนวทางหนึ่งที่อาจจะแก้ปัญหา 3 และปัญหา 4 ได้ก็คือ คำนวณหาค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์และค่าคงที่เจมส์ของปริภูมิ Bynum ดังปัญหาต่อไปนี้

ปัญหา 5 คำนวณหาค่าคงที่ $C_{NJ}(X)$ เมื่อ X เป็นปริภูมิ Bynum

ปัญหา 6 คำนวณหาค่าคงที่ $J(X)$ เมื่อ X เป็นปริภูมิ Bynum

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา ศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ สวนใต้ และ รองศาสตราจารย์ ดร.สมยศ พลับเที่ยง ที่ได้ให้คำแนะนำที่มีคุณค่าอย่างอบอุ่นต่อผู้เขียนบทความวิชาการซึ่งนำมาสู่การปรับปรุงแก้ไขบทความให้ดีขึ้น รวมถึง ดร.ภูมิ คำเอม ที่ให้ข้อคิดดีๆ เกี่ยวกับเนื้อหาของบทความนี้ ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการ ที่ให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ทำให้บทความนี้สำเร็จลุล่วงไปได้อย่างสมบูรณ์ ผู้เขียนขอขอบพระคุณอาจารย์ อารยา วิวัฒน์วานิช และนางสาวญาดาภา โชติดิลก สำหรับความเอื้อเฟื้ออย่างอดทนในการพิมพ์บทความต้นฉบับ สุดท้ายนี้ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อุษาวดี ตันติวรานุรักษ์ และอาจารย์กุสวรา พูลผล สำหรับความช่วยเหลืออย่างกรุณาปราณีระหว่างการจัดเตรียมต้นฉบับบทความวิชาการ

เอกสารอ้างอิง

Alspach Dale. E. (1981). A fixed point free nonexpansive map. *Proc. Amer. Soc.*. *82*. 423-424.

Banch. S. (1922). Sur les operationsdans les ensembles abstraits et leurs applications. *Fund. Math.*. *3*. 133-181.

Brodskii. M. S., & Milman, D. P. On the center of a convex set. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*. *59*. 837-840 (Russian).

Bynum. W. L. (1972). A class of space lacking normal structure. *Composito Math.*. *25*. 233-236.

Casini. E. (1986). About some parameters of normed linear spaces. *Atti Acc. Linzie Rend. fis.-S. VIII. LXXX*. 11-15.

Clarkson. J. A. (1973). The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces. *Ann. of Math*. *38*. 114-115.

Dhompongsa. S., & Kaewkhao, A. (2006). A note on properties that imply the fixed point property. *Abstract and Applied Analysis. Article 34959.*

Dhompongsa. S., Piraisangjun. P., & Saejung. S. (2003). Generalized Jordan von-Neumann constants and uniform normal structure. *Bull. Austral. Math. Soc.*. *67*. 225-240.

Gao. J., & Lau. K-S. (1990). On the geometry of sphere in normed linear spaces. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*. *48*. 101-112.

Gao. J., & Lau. K-S. (1991). On two classes of Banach spaces with normal structure. *Studia Math*. *99*(1). 40-56.

Garcia-Falset. J., Llorens-Fuster. E.. & Mazcunan-Navarro. E. M. (2006). Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings. *Journal of Functional Analysis*. *233*. 494-514.

Goebel. K.. & Kirk. W. A. (1990). *Topics in metric fixed point theory*. Cambridge :Cambridge University.

James. R. C. (1964). Uniformly non-square Banach spaces. *Ann. of Math.*. *80*. 542-550.

Kato. M., Maligranda. L.. & Takahashi. Y. (2001). On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces. *Studia Math.*. *144*(3). 275-295.

Kirk, W.A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. *Amer. Math. Monthly. 72,* 1001-1006.

Saejung, S. (2006). On James and von Neumann-Jordan constants and sufficient conditions for the fixed point property. *J. Math. Anal. Appl., 323.* 1018-1024.

Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. *Studia Math., 2.* 171-180.