

จุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0
ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์

FIXED POINTS FOR CYCLICAL MULTI-VALUES MAPPING ON GENERALIZED DISTANCE τ^0 IN
COMPLETE METRIC SPACE

อนุเทพ เทพบัน¹, สมยศ พลับเที่ยง², และ สมคิด อินเทพ^{1*}
Anutep Tepphun¹, Somyot plubtieng² and Somkid Intep^{1*}

¹ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

² ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนครสวรรค์

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อขยายทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึง สำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่วางนัยทั่วไปกว่าของ Neamane and Kaewkhao (2011)

คำสำคัญ : ฟังก์ชัน τ^0 / ฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p / ฟังก์ชัน MT / การส่งหลายค่าแบบวน

Abstract

In this research, the Neamane and Kaewkhao (2011) results that fixed point theorems for cyclical mapping in complete metric space are extended using generalized distance τ^0 .

Keywords : τ^0 - function / D_p - metric / MT function / Cyclical Mapping

*Corresponding author. E-mail: intep@buu.ac.th

1. บทนำ

ในการศึกษาทฤษฎีของจุดตรึง (fixed point theorem) ทฤษฎีที่สำคัญซึ่งเป็นการเริ่มต้นของการศึกษา ก็คือ หลักการการหดตัวของบานาค (The Banach Contraction Principle) (Kreyzig (1978)) ซึ่งกล่าวไว้ คือ ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (complete metric space) และ $T: X \rightarrow X$ เป็นการส่งแบบหดตัว a (a -contraction mapping) นั่นคือ มีค่าคงที่ $a \in (0,1)$ ซึ่ง $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า T มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น

สำหรับการขยายผลของทฤษฎีบทนี้นั้นปรากฏอยู่ในผลงานวิจัยต่างๆ เช่น Kirk, Srinivasan, and Veeramani (2003) และอ้างอิงอื่นๆ ในนั้นด้วย

ในปี 1969 Nadler (1969) ได้ศึกษาจุดตรึงภายใต้การส่งหลายค่าแบบหดตัว (contraction multi-valued mapping) โดยให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ $P(X)$ แทนวงศ์ (family) เซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X เรียกการส่ง $T: X \rightarrow P(X)$ ว่าเป็นการส่งหลายค่า และถ้ามีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ซึ่ง

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

เราจะเรียก T ว่าการส่งหลายค่าแบบหดตัว โดยที่ $H(A, B) = \max\{h(A, B), h(B, A)\}$ และ $h(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}$

จะเรียก $x \in X$ ว่าเป็นจุดตรึงของการส่งหลายค่า T ก็ต่อเมื่อ $x \in Tx$ ซึ่งจะเขียนแทนเซตของจุดตรึงของ T ด้วย F_T นั่นคือ $F_T = \{x \in X : x \in Tx\}$ ดังนั้น ถ้าให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $T: X \rightarrow CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าแบบหดตัวเมื่อ $CB(X)$ แทน วงศ์ของเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างและมีขอบเขตของ X แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุด

ในปี 2003 หนึ่งในทฤษฎีที่น่าสนใจที่ Kirk, Srinivasan, and Veeramani (2003) ได้พิสูจน์ไว้ คือ ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (complete metric space) (X, d) สมมติให้ $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$ เป็นการส่งแบบวน (cyclic mapping) นั่นคือ $T(A) \subseteq B$ และ $T(B) \subseteq A$ และมี $k \in (0,1)$ ซึ่ง $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว จะได้ว่า $A \cap B \neq \emptyset$ และ T มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวใน $A \cap B$

ในปี 2011 Neamane and Kaewkhao (2011) ได้พัฒนาและขยายผลทฤษฎีของจุดตรึงภายใต้การส่งหลายค่าแบบวน ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) สมมติให้ $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$ เป็นการส่งแบบวนบน A และ B โดยที่ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้ามีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ซึ่ง $H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ $\{A_i\}_{i=1}^n$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X, d) และ 2^X เป็นวงศ์ของเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของ X สมมติให้ $T: \bigcup_{i=1}^n A_i \rightarrow 2^X$ โดยที่ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $\bigcup_{i=1}^n A_i$ $A_{n+1} = A_1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) $Ta_i \subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i \in A_i$ และ $1 \leq i \leq n$;

(b) $\exists k \in (0,1)$ ซึ่ง $H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^n A_i$

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X, d) กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้ามีค่าคงที่ $\theta \in (0,1)$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$H(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) + L \cdot \min\{d(y, Tx), d(x, Ty)\}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตปิด

2. ความรู้พื้นฐาน

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ เราจะต้องศึกษาความรู้พื้นฐาน บทนิยามและบทตั้ง ที่ใช้ประกอบการศึกษาในงานวิจัยนี้ ซึ่งได้ส่วนใหญ่ได้มาจากการศึกษางานวิจัยของ Du (2010) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก p ว่าเป็นฟังก์ชัน τ ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไข

($\tau 1$) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$ สำหรับ $x, y, z \in X$

($\tau 2$) ถ้า $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ซึ่ง $p(x, y_n) \leq M$ สำหรับบางค่าคงที่ $M > 0$ ที่ขึ้นอยู่กับ x แล้ว

$$p(x, y) \leq M$$

($\tau 3$) สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{p(x_n, x_m) : m > n\} = 0$ ถ้ามีลำดับ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y_n) = 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$

($\tau 4$) สำหรับ $x, y, z \in X$, $p(x, y) = 0$ และ $p(x, z) = 0$ แล้ว $y = z$

บทนิยาม 2.2 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก p ว่าเป็นฟังก์ชัน τ^0 ก็ต่อเมื่อ p ว่าเป็นฟังก์ชัน τ และ $p(x, x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

บทตั้ง 2.3 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า p สอดคล้องกับ ($\tau 3$) และลำดับ $\{x_n\}$ บน X ซึ่ง $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{p(x_n, x_m) : m > n\} = 0$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคซีบน X

บทตั้ง 2.4 ให้ A เป็นเซตปิดที่ไม่ว่างบนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) และ $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน กำหนดให้ p มีสมบัติสอดคล้อง ($\tau 3$) และมี $u \in X$ ซึ่ง $p(u, u) = 0$ ดังนั้น จะได้ว่า $p(u, A) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u \in A$ เมื่อ $p(u, A) = \inf\{p(u, a) \mid a \in A\}$

บทตั้ง 2.5 ให้ $x \in X$ และ $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X ถ้า A เป็นเซตปิด แล้ว จะมี $a \in A$ ซึ่ง $p(x, a) = p(x, A)$

บทนิยาม 2.6 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ p เป็นฟังก์ชัน τ^0 สำหรับ $A, B \in CB(X)$ กำหนดฟังก์ชัน $D_p: CB(X) \times CB(X) \rightarrow [0, \infty)$ โดย

$$D_p(A, B) = \max\{\delta_p(A, B), \delta_p(B, A)\}$$

เมื่อ $\delta_p(A, B) = \sup\{p(a, B) : a \in A\}$ และ $p(x, A) = \inf\{p(x, a) : a \in A\}$

จะเรียก D_p ว่าเป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p

บทตั้ง 2.7 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ D_p เป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p แล้ว สำหรับ $A, B, C \in CB(X)$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไข

(1) ถ้า $\delta_p(A, B) = 0$ แล้ว $A = B$

(2) $\delta_p(A, C) \leq \delta_p(A, B) + \delta_p(C, B)$

(3) สำหรับทุกฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p ที่กำหนดโดย p ที่เป็นฟังก์ชัน τ^0 เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $CB(X)$

บทนิยาม 2.8 (Mizoguchi and Takahashi (1989)) ให้ $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก φ ว่าเป็นฟังก์ชัน MT ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Mizoguchi-Takahashi นั่นคือ $\limsup_{s \rightarrow t^+} \varphi(s) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$

ข้อสังเกต 2.9

(1) ถ้าฟังก์ชัน $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ ซึ่ง $\varphi(t) = k$ เมื่อ $k \in [0, 1)$ แล้ว φ เป็นฟังก์ชัน MT

(2) ถ้า $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด (Non-decreasing function) แล้ว φ เป็นฟังก์ชัน MT

(3) ถ้า $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ เป็นฟังก์ชัน MT ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$ จะมี $r_t \in [0, 1)$ และ $\varepsilon_t \in [0, 1)$

ซึ่ง $\varphi(s) \leq r_t$ สำหรับทุก $s \in [t, t + \varepsilon_t)$

(4) ถ้า $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ เป็นฟังก์ชัน MT แล้ว $k: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ ซึ่ง $k(t) = \frac{\varphi(t) + 1}{2}$ เป็นฟังก์ชัน MT

ดังนั้น จากแนวคิดที่ได้ศึกษาความรู้พื้นฐาน บทนิยามและบทตั้ง ที่ได้มาจากงานวิจัยของ Du, W. (2010) จึงนำไปสู่การสร้างทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางปริภูมิ ซึ่งวางนัยทั่วไปกว่าของ Neamanee and Kaewkhao (2011)

3. ทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางปริภูมิ
ทฤษฎีบทที่สำคัญในงานวิจัยนี้มีทั้งหมด 3 ทฤษฎีด้วยกันซึ่งเป็นขยายแนวคิดทฤษฎีจุดตรึงของการส่งหลายค่าแบบวน ซึ่งวางนัยทั่วไปกว่าของ Neamanee and Kaewkhao (2011) ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X, d) และให้ $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B$ และให้ $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่ง

$$D_p(Tx, Ty) \leq \varphi(p(x, y))p(x, y) \text{ สำหรับทุก } x \in A \text{ และ } y \in B$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

พิสูจน์ จากข้อสังเกต 2.9 (4) เราสามารถนิยามฟังก์ชัน $k: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ ที่เป็นฟังก์ชัน MT โดย $k(t) = \frac{\varphi(t)+1}{2}$ ดังนั้น จะได้ว่า $\varphi(t) < k(t)$ และ $0 < k(t) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$ กำหนดให้ $x_0 \in A$ และ $x_1 \in Tx_0 \subseteq B$ ถ้า $D_p(Tx_0, Tx_1) = 0$ จะได้ว่า $Tx_0 = Tx_1$ นั่นคือ $x_1 \in Tx_1$ นั่นหมายความว่า $F_T \neq \emptyset$ แต่ถ้า $D_p(Tx_0, Tx_1) > 0$ จะได้ว่า จะมี $x_2 \in Tx_1 \subseteq A$ ซึ่ง

$$p(x_1, x_2) \leq D_p(Tx_0, Tx_1) \leq \varphi(p(x_0, x_1))p(x_0, x_1) < k(p(x_0, x_1))p(x_0, x_1)$$

นั่นคือ $p(x_1, x_2) < k(p(x_0, x_1))p(x_0, x_1)$ แต่ถ้า $D_p(Tx_1, Tx_2) = 0$ ซึ่งจะได้ว่า $Tx_1 = Tx_2$ นั่นคือ $x_2 \in Tx_2$ แสดงว่า $F_T \neq \emptyset$ แต่ถ้า $D_p(Tx_1, Tx_2) > 0$ จะได้ว่า จะมี $x_3 \in Tx_2 \subseteq B$ ซึ่ง

$$p(x_2, x_3) \leq D_p(Tx_1, Tx_2) \leq \varphi(p(x_1, x_2))p(x_1, x_2) < k(p(x_1, x_2))p(x_1, x_2)$$

นั่นคือ $p(x_2, x_3) < k(p(x_1, x_2))p(x_1, x_2)$ ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ลำดับ $\{x_n\}$ โดยที่ $x_{n+1} \in Tx_n$ ซึ่งจะพบว่า $x_{2n} \in A$, $x_{2n+1} \in B$, $p(x_n, x_{n+1}) > 0$ และ $p(x_{n+1}, x_{n+2}) < k(p(x_n, x_{n+1}))p(x_n, x_{n+1})$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $k(t) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$ ดังนั้น $\{p(x_n, x_{n+1})\}$ เป็นลำดับลดอย่างเข้มในช่วง $[0, \infty)$ กำหนดให้ $\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_{n+1}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} p(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ เนื่องจาก k เป็นฟังก์ชัน MT ดังนั้น จะมี $c \in (0, 1)$ และ $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $k(s) \leq c$ สำหรับทุก $s \in [\delta, \delta + \varepsilon)$ และเนื่องจาก $\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_{n+1}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} p(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ นั่นคือ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\ell \in \mathbb{N}$ ที่เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $\delta \leq p(x_n, x_{n+1}) < \delta + \varepsilon$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $n \geq \ell$ และกำหนดให้ $v_n = x_{n+\ell-1}$ ดังนั้น เราจะพบว่า

$$p(v_{n+1}, v_{n+2}) \leq k(p(v_n, v_{n+1}))p(v_n, v_{n+1}) \leq cp(v_n, v_{n+1})$$

เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่า $p(v_{n+1}, v_{n+2}) \leq cp(v_n, v_{n+1}) \leq \dots \leq c^n p(v_1, v_2)$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น สำหรับ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m > n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(v_n, v_m) &\leq p(v_n, v_{n+1}) + p(v_{n+1}, v_{n+2}) + \dots + p(v_{m-1}, v_m) \\ &< c^{n-1} p(v_1, v_2) + c^n p(v_1, v_2) + \dots + c^{m-1} p(v_1, v_2) \\ &< \frac{c^{n-1}}{1-c} p(v_1, v_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

เนื่องจาก $0 < c < 1$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ดังนั้น $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{p(v_n, v_m) : m > n\} = 0$ เพราะฉะนั้นลำดับ $\{v_n\}$ เป็นลำดับโคซี เนื่องจาก (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ ดังนั้น จะมี $v \in X$ ซึ่ง $v_n \rightarrow v$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เนื่องจาก $\{x_{2n}\} \subseteq A$ และ $\{x_{2n-1}\} \subseteq B$ ดังนั้น $\{v_{2n}\} \subseteq A$ และ $\{v_{2n-1}\} \subseteq B$ เนื่องจาก A และ B เป็นเซตปิด และ $v_{2n} \rightarrow v$ และ $v_{2n-1} \rightarrow v$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ทำให้ได้ว่า $v \in A$ และ $v \in B$ ตามลำดับ แสดงว่า $v \in A \cap B$ และจากเงื่อนไข (T 2) และ (2.4) จะได้ว่า สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

$$p(v_n, v) < \frac{c^{n-1}}{1-c} p(v_1, v_2)$$

จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} p(v_n, v) = 0$ แต่เนื่องจาก

$$\begin{aligned} p(v, Tv) &\leq p(v, v_{n+1}) + p(v_{n+1}, Tv) \\ &\leq p(v, v_{n+1}) + D_p(Tv_n, Tv) \\ &\leq p(v, v_{n+1}) + \varphi(p(v_n, v))p(v_n, v) \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ $n \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $p(v, Tv) = 0$ และ เนื่องจาก Tv เป็นเซตปิด แสดงว่า $v \in Tv$

ข้อสังเกต 3.2 เราจะพบว่าทฤษฎีบท 3.1 ได้ขยายทฤษฎีบท 1.1

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $X = \square, A = \{0,1\}$ และ $B = \{1,2\}$ เมื่อ $d(x,y) = |x-y|$ สำหรับ $x,y \in X$ แล้ว (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางปริภูมิและให้การส่ง $T: A \cup B \rightarrow P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx = \begin{cases} \{1,2\} & ; x=0, \\ \{1\} & ; x \in \{1,2\} \end{cases}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in A \cup B = \{0,1,2\}$ และ $F_T = \{1\} \subseteq A \cap B$

ซึ่งเราจะพบว่า $H(T0,T1) = 1$ และ $d(0,1) = 1$ ดังนั้น จึงไม่มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ที่ทำให้ $H(T0,T1) \leq kd(0,1)$ ทำให้ทฤษฎีบท 1.1 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neamanee and Kaewkhao (2011) ไม่สามารถบอกได้ว่า T จะมีจุดตรึงใน $A \cap B$ แต่พบว่า สำหรับ $p: X \times X \rightarrow [0,\infty)$ กำหนดโดย

$$p(x,y) = \max\{2(x-y), 3(y-x)\} \text{ สำหรับ } x,y \in X$$

และ $\varphi: [0,\infty) \rightarrow [0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t) = \frac{9}{10}$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$

จะได้ว่า $D_p(T0,T1) = 2 \leq \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(0,1))p(0,1)$, $D_p(T0,T2) = 2 \leq \frac{9}{10}(6) = \varphi(p(0,2))p(0,2)$,

และ $D_p(T1,T2) = 0 \leq \frac{9}{10}(3) = \varphi(p(1,2))p(1,2)$ ทำให้ได้ว่า $D_p(Tx,Ty) \leq \varphi(p(x,y))p(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A$

และ $y \in B$ และเนื่องจาก p เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X และ φ เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.1 ทำให้ได้ว่า $F_T \neq \emptyset$ และ $F_T \subseteq A \cap B$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $\{A_i\}_{i=1}^n$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางปริภูมิ (X,d) และให้ $p: X \times X \rightarrow [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ $T: \bigcup_{i=1}^n A_i \rightarrow 2^X$ เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน $\bigcup_{i=1}^n A_i$ และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ และเมื่อ $A_{n+1} = A_1$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- $Ta_i \subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i \in A_i$ และ $1 \leq i \leq n$
- มี $\varphi: [0,\infty) \rightarrow [0,1)$ ที่เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่ง $D_p(Tx,Ty) \leq \varphi(p(x,y))p(x,y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^n A_i$

พิสูจน์ การพิสูจน์สามารถพิสูจน์ได้ในลักษณะเดียวกับทฤษฎีบท 3.1

ข้อสังเกต 3.5 เราจะพบว่าทฤษฎีบท 3.4 ได้ขยายทฤษฎีบท 1.2

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางปริภูมิ (X,d) และ $p: X \times X \rightarrow [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน $CB(X)$ กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขตสำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้ามีฟังก์ชัน $\varphi: [0,\infty) \rightarrow [0,1)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน MT และค่าคงที่ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$D_p(Tx,Ty) \leq \varphi(p(x,y))p(x,y) + L \cdot \min\{p(x,Ty), p(y,Tx)\}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตปิด

พิสูจน์ เราสามารถใช้วิธีการเดียวกันกับทฤษฎี 3.1 ในการสร้างลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_{n+1} \in Tx_n$ เพราะฉะนั้น ถ้า $x_n \in A$ เราจะได้ว่า $x_{n+1} \in Tx_n \subseteq B$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_p(Tx_n, Tx_{n+1}) &\leq \varphi(p(x_n, x_{n+1}))p(x_n, x_{n+1}) + L \cdot \min\{p(x_{n+1}, Tx_n), p(x_n, Tx_{n+1})\} \\ &\leq \varphi(p(x_n, x_{n+1}))p(x_n, x_{n+1}) + L \cdot p(x_{n+1}, Tx_n) \\ &= \varphi(p(x_n, x_{n+1}))p(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

ดังนั้น แสดงว่า $F_T \neq \emptyset$ และ $F_T \subseteq A \cap B$ ต่อไปเราจะแสดงว่า F_T เป็นเซตปิด กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ เป็นลำดับใน F_T ซึ่ง $x_n \rightarrow u$ เนื่องจาก $F_T \subseteq A \cap B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตปิด จะได้ว่า $u \in A \cap B$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} p(u, Tu) &\leq p(u, x_n) + p(x_n, Tx_{n-1}) + D_p(Tx_{n-1}, Tu) \\ &\leq p(u, x_n) + D_p(Tx_{n-1}, Tu) \\ &\leq p(u, x_n) + \varphi(p(x_{n-1}, u))p(x_{n-1}, u) + Lp(u, Tx_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq p(u, x_n) + \varphi(p(x_{n-1}, u))p(x_{n-1}, u) + L(p(u, x_n) + p(x_n, Tx_{n-1})) \\ &\leq p(u, x_n) + \varphi(p(x_{n-1}, u))p(x_{n-1}, u) + Lp(u, x_n) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $n \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $p(u, Tu) = 0$ เนื่องจาก Tu เป็นเซตปิด ดังนั้น $u \in Tu$ ทำให้ได้ว่า F_7 เป็นเซตปิด แสดงว่า F_7 เป็นเซตปิด

ข้อสังเกต 3.7 เราจะพบว่าทฤษฎีบท 3.6 ได้ขยายทฤษฎีบท 1.3

4. บทสรุป

จากบทความนี้จะพบวิธีการในนำเอาความรู้ที่ได้จากการศึกษางานวิจัยต่างๆ โดยเฉพาะงานวิจัยของ Du (2010) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน τ^0 ฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p และฟังก์ชัน MT มาใช้ในการสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่วางนัยทั่วไปกว่าของ Neamane and Kaewkhao (2011)

5. เอกสารอ้างอิง

- Du, W. (2010). Some new results and generalizations in metric fixed point theory. *Nonlinear Analysis*, 73, 1439-1446.
- Kirk, W.A., Srinivasan, P.S., & Veeramani, P. (2003). Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions. *Fixed Point Theory*, 4, 79-89.
- Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Canada: Jonh Wiley & Sons.
- Lin, L.J., & Du, W. (2006). Ekeland's variational principle, minimax theorems and existence of nonconvex equilibria in complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323, 360-370.
- Mizoguchi, N, Takahashi, W. (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 141, 177-188.
- Nadler, S.B. (1969). Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal Mathematical*, 30, 475-488.
- Neammanee, K., & Kaewkhao, A. (2011). Fixed points and Best Proximity Points For Multi-Valued Mapping Satisfying Cyclical Condition. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 1(1), 1-9.
- Takahashi, W. (2000). *Nonlinear Functional Analysis Fixed Point Theory and its Applications*. Japan: Yokohama.