การปรับปรุงตัวแบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

An Improvement of EOQ Model with Defective Items and Special Sales Price

คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร*

Kanint Teerapabolarn*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

Received : 8 November 2017

Accepted : 12 December 2017

Published online : 4 January 2018

บทคัดย่อ

Teerapabolarn and Khamrod (2017) ได้หาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ 0 หน่วย ซึ่งไม่ครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลัง ดังนั้นเพื่อให้ครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลัง การศึกษาครั้งนี้จึงปรับปรุงตัวแบบ EOQ ของ Teerapabolarn and Khamrod (2017) โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q หน่วย เมื่อ $0 \le q \le Q^*$ หน่วย โดยที่ Q^* คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดก่อนและหลังลดราคาสินค้าแบบพิเศษ และในการศึกษาครั้งนี้ได้ใช้วิธีพีชคณิต หาตัวแบบ EOQ ที่ต้องการ นอกจากนี้ได้ยกตัวอย่างเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ตัวแบบ EOQ ที่หาได้

คำสำคัญ : ตัวแบบ EOQ สินค้าชำรุด การลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

Abstract

Teerapabolarn and Khamrod (2017) determined EOQ model with defective items and special sales price by assuming the level of inventory, while a special order is placed, to be 0 unit, which does not cover all levels of inventory. In order to cover all levels of inventory, this study improves the EOQ model of Teerapabolarn and Khamrod (2017) by assuming the level of inventory, while a special order is placed, to be q unit(s), where $0 \le q \le Q^*$ and Q^* is the optimal order quantity before and after special sales, and in this study, the algebraic method is used to determine the desired EOQ model. In addition, some examples are provided to illustrate application of the obtained EOQ model.

Keywords : EOQ model, defective items, special sales price.

***Corresponding author. E-mail** : kanint@buu.ac.th

บทนำ

ในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีสินค้าคงคลัง เนื้อหาเริ่มต้นจะต้องกล่าวถึงตัวแบบ EOQ (Economic Order Quantity) พื้นฐาน ซึ่งเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ตัวแบบแรกที่ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุด ในปัจจุบันตัวแบบ EOQ พื้นฐานนี้ถูกพัฒนาและปรับปรุงไปสู่ตัวแบบ EOQ อื่น ๆ อีกมากมาย ภายใต้สมมุติฐานที่สอดคล้องกับระบบสินค้าคงคลังที่เกิดขึ้นจริงมากขึ้น และตัวแบบ EOQ ตัวแบบหนึ่งที่น่าสนใจ คือ ตัวแบบที่ Tersine (1994) ได้พัฒนาและปรับปรุงตัวแบบ EOQ พื้นฐานให้สอดคล้องกับระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ Tersine (1994) เรียกตัวแบบนี้ว่า ตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ (EOQ model with special sales price) ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้กับกรณีที่ระบบสินค้าคงคลังมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ กล่าวคือ สมมุติว่าในขณะนี้ราคาของสินค้าเท่ากับ c บาทต่อหน่วยสินค้า และผู้จำหน่ายสินค้าได้ประกาศลดราคาสินค้าแบบพิเศษในอีกหนึ่งเดือนข้างหน้า k ($0<k<c$) บาทต่อหน่วยสินค้า ซึ่งจะทำให้ราคาของสินค้ามีค่าลดลง k บาทต่อหน่วยสินค้า ทำให้ราคาใหม่ในช่วงเวลาที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ c-k บาทต่อหน่วยสินค้า และเมื่อเลยช่วงเวลาที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษดังกล่าว ราคาสินค้าจะกลับมามีราคาเท่าเดิม หรือมีราคาเท่ากับก่อนมีการการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ จะเห็นได้ว่าราคาของสินค้าที่กล่าวมานั้นอาจมีค่าลดลงในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง จากนั้นราคาของสินค้าจะกลับมามีราคาเท่าเดิม ทำให้ราคาของสินค้าในตัวแบบนี้จะมีค่าไม่คงตัวเหมือนราคาสินค้าที่อยู่ในสมมุติฐานของ ตัวแบบ EOQ พื้นฐาน ซึ่งในการหาตัวแบบ EOQ ของระบบสินค้าคงคลังนี้ Tersine (1994) ได้สมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ 0 หน่วย ต่อมา Teerapabolarn and Thornsri (2014) ได้ปรับปรุงตัวแบบ EOQ ของ Tersine (1994) โดยสมมุติให้ได้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q ($0 < q \leq Q^*$) หน่วย เมื่อ Q^* คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดก่อนและหลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

เมื่อพิจารณาตัวแบบ EOQ ของ Tersine (1994) หรือตัวแบบ EOQ ของ Teerapabolarn and Thornsri (2014) จะพบว่าตัวแบบ EOQ ดังกล่าวเหมาะสำหรับกรณีที่สินค้าทั้งหมดในระบบสินค้าคงคลังมีคุณภาพดี 100% หรือไม่มีสินค้าชำรุดในระบบสินค้าคงคลัง ซึ่งในความเป็นจริงเป็นข้อสมมุติที่เกิดขึ้นได้ยากและอาจเป็นไปไม่ได้ ดังที่ได้มีการศึกษาไว้ในงานวิจัยของ Schwaller (1998), Salameh and Jaber (2000), Huang (2003) และ Tu *et al.* (2011) และงานวิจัยของ Huang (2003) ได้เพิ่มสมมุติฐานของสินค้าชำรุดเข้าไปในระบบสินค้าคงคลังที่ได้ศึกษา โดยต้องมีการตรวจสอบสินค้าทุกหน่วยทั้ง 100% และต้องทราบสัดส่วนที่แน่นอนของสินค้าที่ชำรุดทั้งหมดก่อนนำไปเก็บในคลังหรือนำไปขายหลังการตรวจสอบแล้วเสร็จ ต่อมา Teerapabolarn and Khamrod (2017) ได้หาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยปรับปรุงตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าของ Tersine (1994) ด้วยการเพิ่มสมมุติฐานของสินค้าชำรุด (Huang, 2003) เข้าไปในระบบสินค้าคงคลัง แต่พิจารณาเฉพาะระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ 0 หน่วย เท่านั้น ทำให้ตัวแบบนี้ไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับกรณีที่ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่ามากกว่า 0 หน่วย ซึ่งไม่ครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลัง ดังนั้นจุดที่สนใจในการศึกษาครั้งนี้ คือ ต้องการปรับปรุงตัวแบบ EOQ ของ Teerapabolarn and Khamrod (2017) ให้ครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลัง นั่นคือ ได้สมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q หน่วย เมื่อ $0 \leq q \leq Q^*$ หน่วย โดยที่ Q^* คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะ

ที่สุดก่อนและหลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ และวิธีที่ใช้ในการหาตัวแบบ EOQ ที่ต้องการ คือ วิธีพีชคณิต (Algebraic method) ที่นำเสนอโดย Grubbström (1996)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อหาตัวแบบ EOQ เหมาะที่สุดที่ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุด และมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ และครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลัง

สัญกรณ์ของตัวแบบและสมมุติฐานของตัวแบบ

สัญกรณ์ (Notation) ที่ใช้ในตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ กำหนดดังนี้

D แทนอัตราความต้องการสินค้าที่ไม่ชำรุดต่อหน่วยเวลา

A แทนค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้าต่อครั้ง (ต่อคาบ)

F แทนค่าใช้จ่ายดำเนินการตรวจสอบสินค้าต่อครั้ง (ต่อคาบ)

f แทนค่าใช้จ่ายในการตรวจสอบสินค้าต่อหน่วยสินค้า

c แทนราคาสินค้าที่สั่งซื้อต่อหน่วยสินค้า

d แทนสัดส่วนของสินค้าที่ชำรุด

i แทนค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าที่ไม่ชำรุดที่แปรไปตามราคาสินค้าต่อหน่วยสินค้าต่อหน่วยเวลา

k แทนส่วนต่างของราคาสินค้าที่ลดลง

Q^* แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบปกติเหมาะที่สุดก่อนและหลังลดราคาสินค้าแบบพิเศษ (รวมสินค้าที่ชำรุด)

q แทนระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ (ไม่รวมสินค้าที่ชำรุด)

Q_s แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ (รวมสินค้าที่ชำรุด)

Q_s^* แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด (รวมสินค้าที่ชำรุด)

C_s แทนค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ

C_n แทนค่าใช้จ่ายรวมเมื่อไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ

G แทนค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้

G^* แทนค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุด

สมมุติฐาน (Assumption) ของตัวแบบที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ได้กำหนดให้สอดคล้องกับตัวแบบที่ปรากฏในงานวิจัยของ Teerapabolarn and Thornsri (2014) และในงานวิจัยของ Huang (2003) ดังนี้

1. ความต้องการสินค้าที่ไม่ชำรุดต่อหน่วยเวลา (D) มีค่าคงตัว และทราบค่าแน่นอน
2. ช่วงเวลาตั้งแต่มีการสั่งซื้อสินค้าจนได้รับสินค้า หรือช่วงเวลานำ (Lead time) มีค่าเท่ากับศูนย์
3. การได้รับสินค้าที่สั่งซื้อจะได้รับครั้งเดียวทั้งหมดทันทีที่สั่งซื้อสินค้า
4. จะทำการสั่งซื้อสินค้าเมื่อระดับสินค้าคงคลังลดลงมาเท่ากับศูนย์หน่วย (ในกรณีที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบปรกติ)
5. ราคาสินค้าต่อหน่วย (c) ไม่คงตัวตลอดเวลา

6. สัดส่วนของสินค้าที่ชำรุด (d) ต้องทราบค่าก่อนนำไปจัดเก็บในคลังสินค้าหรือนำไปขายหลังการตรวจสอบ
7. ระบบสินค้าคงคลังจะดำเนินไปเรื่อย ๆ อย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด
8. ไม่ยอมให้มีการขาดแคลนสินค้า

วิธีดำเนินการวิจัย

วิธีที่ใช้หาตัวแบบ EOQ สำหรับงานวิจัยนี้ คือ วิธีพีชคณิตที่เรียกว่า กำลังสองสมบูรณ์ (completing the square) ซึ่งนำเสนอโดย Grubbström (1996) นั่นคือใช้พีชคณิตจัดผลต่างของฟังก์ชันค่าใช้จ่ายรวมที่เกิดขึ้นให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ของปริมาณการสั่งซื้อสินค้า แบบพิเศษ เพื่อทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุดนั่นคือ จัดฟังก์ชัน $a_1x^2 - a_2x$ ให้อยู่ในรูป

$$a_1\left(x - \frac{a_2}{2a_1}\right)^2 - \frac{a_2^2}{4a_1} \tag{1}$$

โดยที่ a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริงบวกและ x เป็นตัวแปรตัดสินใจ (Decision variable) หรือผลเฉลยที่ต้องการ ในการศึกษาครั้งนี้ x จะหมายถึง Q_s

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

เริ่มต้นจะเป็นการหาตัวแบบ EOQ เหมาะที่สุด หรือหาตัวแบบของปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดโดยใช้วิธีพีชคณิตที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้ว ต่อจากนั้นจะเป็นการยกตัวอย่างเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ผลการวิจัยที่หามาได้

ตัวแบบ EOQ และค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุด

ผลลัพธ์ที่ต้องการหาคือตัวแบบของปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด และค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ Q_s^* หน่วย เมื่อ

$$Q_s^* = \frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d},\ 0 \le q \le (1-d)Q^* \tag{2}$$

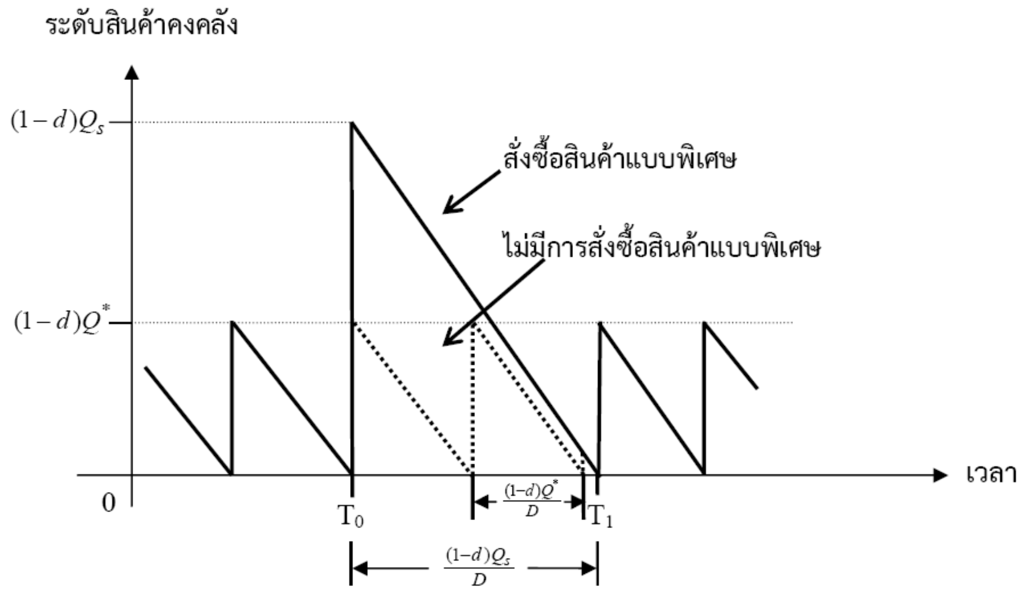
โดยที่ $Q^* = \frac{1}{1-d}\sqrt{\frac{2(A+F)D}{ic}}$ และค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุด คือ G^* เมื่อ

$$G^* = \begin{cases} \frac{(A+F)(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*} - 1\right)^2 &, q = 0 \\ (A+F)\left[\frac{c-k}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 1\right], & 0 < q \le (1-d)Q^* \end{cases} \tag{3}$$

พิสูจน์ พิจารณาระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษซึ่งมีค่าเท่ากับ q หน่วย และจาก Tersine (1994) และ Teerapabolarn and Thornsri (2014) การพิสูจน์ผลลัพธ์ที่ได้จะแบ่งตามระดับสินค้าคงคลัง q ออกเป็นสองกรณี คือ กรณีที่ $q = 0$ หน่วย และกรณีที่ $0 < q \le (1-d)Q^*$ หน่วย ดังนี้

กรณีที่ $q = 0$ หน่วย

ให้ T_0 แทนจุดเริ่มต้นที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษและ T_1 แทนจุดสิ้นสุดคาบของการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษการเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ แสดงการเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังได้ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 การเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังในกรณีที่ $q = 0$ หน่วย

การปรับราคาสินค้าลดลงแบบพิเศษจาก c บาทต่อหน่วยสินค้า เป็น $c-k$ บาทต่อหน่วยสินค้า เกิดขึ้น ณ จุดเวลา T_0 (ระดับสินค้าคงคลังเท่ากับ 0 หน่วย) ซึ่งอาจมีหรือไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ดังภาพที่ 1 และเมื่อเลยจุดเวลานี้ไปแล้ว สินค้าจะมีราคา c บาทต่อหน่วยสินค้า เท่าเดิม จะเห็นได้ว่าก่อนและหลังเวลาที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 จะสามารถจัดหาสินค้าเหมาะที่สุดด้วยราคา c บาทต่อหน่วยสินค้าในปริมาณ Q^* หน่วยซึ่ง Huang (2003) สามารถหา Q^* ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$Q^* = \frac{1}{1-d}\sqrt{\frac{2(A+F)D}{ic}} \tag{4}$$

และในกรณีนี้ ($q = 0$) Teerapabolarn and Khamrod (2017) ใช้วิธีพีชคณิตหาตัวแบบของปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด (Q_s^*) ได้ดังนี้

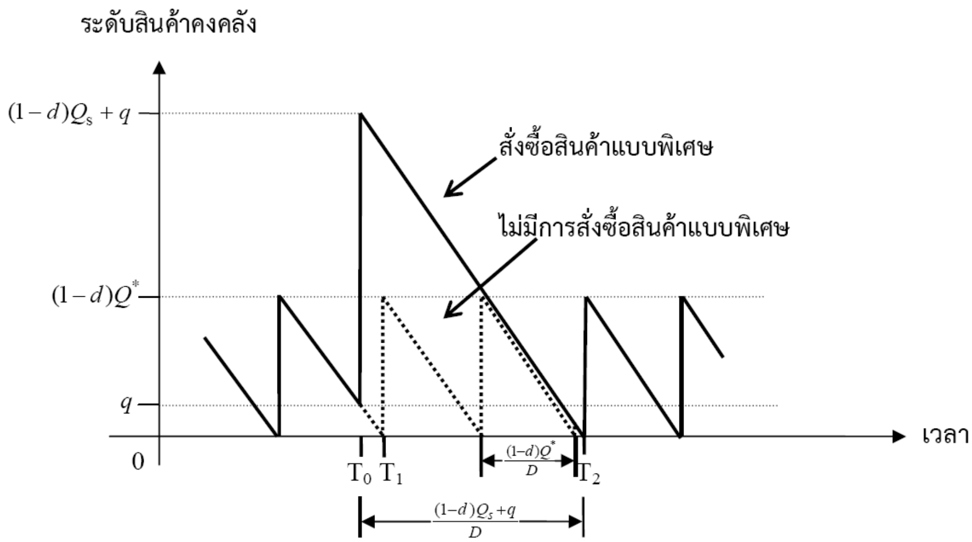
$$Q_s^* = \frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right]$$

และหาค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ (G^*) ได้เท่ากับ

$$G^* = \frac{(A+F)(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*} - 1\right)^2$$

กรณีที่ $0 < q \le (1-d)Q^*$ **หน่วย**

ให้ T_0 แทนจุดเริ่มต้นที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ T_1 แทนจุดสิ้นสุดคาบของการสั่งซื้อสินค้าแบบปกติ (หลังจากมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ) และ T_2 แทนจุดสิ้นสุดคาบของการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษการเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ แสดงการเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังได้ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 การเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังในกรณีที่ $0 < q \le (1-d)Q^*$ หน่วย

การปรับราคาสินค้าลดลงแบบพิเศษจาก c บาทต่อหน่วยสินค้า เป็น $c-k$ บาทต่อหน่วยสินค้า เกิดขึ้น ณ จุดเวลา T_0 (ระดับสินค้าคงคลังเท่ากับ q หน่วย) ซึ่งอาจมีหรือไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ดังภาพที่ 2 และเมื่อเลยจุดเวลานี้ไปแล้วสินค้าจะมีราคา c บาทต่อหน่วยสินค้าเท่าเดิม จะเห็นได้ว่าก่อนและหลังเวลาที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 จะสามารถจัดหาสินค้าเหมาะที่สุดด้วยราคา c บาทต่อหน่วยสินค้า ในปริมาณ Q^* หน่วย ดังสมการ (4) ต่อไปพิจารณาค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ของระบบสินค้าคงคลัง

ถ้ามีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 ในปริมาณ Q_s หน่วย ค่าใช้จ่ายรวมตั้งแต่จุดเวลา T_0 ถึง T_2 ประกอบด้วย ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้ามีค่าเท่ากับ A ค่าใช้จ่ายดำเนินการตรวจสอบสินค้ามีค่าเท่ากับ F ค่าใช้จ่ายที่เป็นมูลค่าสินค้าที่พิจารณาเฉพาะสินค้าไม่ชำรุดมีค่าเท่ากับ $(c-k)(1-d)Q_s$ ค่าใช้จ่ายในการตรวจสอบสินค้ามีค่าเท่ากับ fQ_s และค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าสามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองช่วง คือ ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาตั้งแต่จุดเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
ic\int_0^{\frac{q}{D}}(q-Dx)\,dx + i(c-k)\int_0^{\frac{q}{D}}(1-d)Q_s\,dx &= ic\left[qx-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{q}{D}} + i(c-k)\left[(1-d)Q_s x\right]_0^{\frac{q}{D}} \\
&= \frac{icq^2}{2D} + i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D}
\end{aligned} \tag{5}
$$

และค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาตั้งแต่จุดเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
i(c-k)\int_0^{\frac{(1-d)Q_s}{D}}\left[(1-d)Q_s - Dx\right]dx &= i(c-k)\left[(1-d)Q_s x - \frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{(1-d)Q_s}{D}} \\
&= i(c-k)\frac{\left[(1-d)Q_s\right]^2}{2D}
\end{aligned} \tag{6}
$$

ดังนั้นค่าใช้จ่ายรวมทั้งหมดที่เกิดขึ้นตั้งแต่จุดเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$
A + F + (c-k)(1-d)Q_s + fQ_s + i(c-k)\frac{\left[(1-d)Q_s\right]^2}{2D} + \frac{icq^2}{2D} + i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D}
$$

นั่นคือ จะได้ว่าค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 (C_s) มีค่าเท่ากับ

$$
C_s = A + F + (c-k)(1-d)Q_s + fQ_s + i(c-k)\frac{\left[(1-d)Q_s\right]^2}{2D} + \frac{icq^2}{2D} + i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D} \tag{7}
$$

ถ้าไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ แต่สั่งซื้อสินค้าแบบปรกติเหมือนเดิม ณ จุดเวลา T_1 เท่ากับ Q^* หน่วย (พิจารณาเส้นประในภาพที่ 2) ปริมาณสินค้าที่พิจารณาเฉพาะสินค้าที่ไม่ชำรุดตั้งแต่จุดเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ $(1-d)Q_s$ หน่วย ในราคา c บาทต่อหน่วยสินค้า และจำนวนครั้งในการสั่งซื้อสินค้าและตรวจสอบสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{Q_s}{Q^*}$ ครั้ง ดังนั้นค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ตั้งแต่จุดเวลา T_0 ถึง T_2 ประกอบด้วย ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{Q_s}{Q^*}A$ ค่าใช้จ่ายดำเนินการตรวจสอบสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{Q_s}{Q^*}F$ ค่าใช้จ่ายที่เป็นมูลค่าสินค้ามีค่าเท่ากับ $c(1-d)Q_s$ ค่าใช้จ่ายในการตรวจสอบสินค้ามีค่าเท่ากับ fQ_s และค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าสามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองช่วง คือ ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาตั้งแต่จุดเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ

$$ic\int_{0}^{\frac{q}{D}}(q-Dx)\,dx = ic\left[qx-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{q}{D}}$$

$$= \frac{icq^2}{2D} \tag{8}$$

และค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาตั้งแต่จุดเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{Q_s}{Q^*}\right)ic\int_{0}^{\frac{(1-d)Q^*}{D}}\left[(1-d)Q^*-Dx\right]dx = \left(\frac{Q_s}{Q^*}\right)ic\left[(1-d)Q^*x-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{(1-d)Q^*}{D}}$$

$$= ic\left(\frac{Q_s}{Q^*}\right)\frac{[(1-d)Q^*]^2}{2D}$$

$$= \frac{icQ_s(1-d)^2Q^*}{2D} \tag{9}$$

ดังนั้นจะได้ว่าค่าใช้จ่ายรวมทั้งหมดที่เกิดขึ้นตั้งแต่จุดเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$\frac{Q_s}{Q^*}(A+F)+c(1-d)Q_s+fQ_s+\frac{icq^2}{2D}+\frac{icQ_s(1-d)^2Q^*}{2D}$$

นั่นคือ ค่าใช้จ่ายรวมเมื่อไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ (C_n) มีค่าเท่ากับ

$$C_n = \frac{Q_s}{Q^*}(A+F)+c(1-d)Q_s+fQ_s+\frac{icq^2}{2D}+\frac{icQ_s(1-d)^2Q^*}{2D} \tag{10}$$

และค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้ (G) มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
G &= C_n - C_s \\
&= \frac{Q_s}{Q^*}(A+F)+c(1-d)Q_s+fQ_s+\frac{icq^2}{2D}+\frac{icQ_s(1-d)^2Q^*}{2D} \\
&\quad -\left\{A+F+(c-k)(1-d)Q_s+fQ_s+i(c-k)\frac{\left[(1-d)Q_s\right]^2}{2D}+\frac{icq^2}{2D}+i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D}\right\} \\
&= \frac{Q_s}{Q^*}(A+F)+\frac{icQ_s(1-d)^2Q^*}{2D}+k(1-d)Q_s-i(c-k)\frac{\left[(1-d)Q_s\right]^2}{2D}-i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D}-A-F \\
&= \frac{Q_s}{D}\left[\frac{(A+F)D}{Q^*}+\frac{ic(1-d)^2Q^*}{2}\right]+k(1-d)Q_s-i(c-k)\frac{\left[(1-d)Q_s\right]^2}{2D}-i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D}-A-F \\
&= \frac{Q_s}{D}\left[\frac{2(A+F)D+ic(1-d)^2(Q^*)^2}{2Q^*}\right]+k(1-d)Q_s-i(c-k)\frac{\left[(1-d)Q_s\right]^2}{2D}-i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D}-A-F
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(A+F)Q_s}{Q^*} + k(1-d)Q_s - i(c-k)\frac{[(1-d)Q_s]^2}{2D} - i(c-k)\frac{q(1-d)Q_s}{D} - A - F \qquad (\text{โดย } Q^* = \frac{1}{1-d}\sqrt{\frac{2(A+F)D}{ic}})$$

$$= -i(c-k)\frac{[(1-d)Q_s]^2}{2D} + \left[\frac{2(A+F)}{Q^*} - i(c-k)\frac{(1-d)q}{D} + (1-d)k\right]Q_s - A - F$$

$$= -\frac{i(c-k)(1-d)^2}{2D}\left\{Q_s^2 + \left(\frac{-2D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] + \frac{2q}{1-d}\right)Q_s\right\} - A - F$$

$$= -\frac{i(c-k)(1-d)^2}{2D}\left\{Q_s^2 - 2\left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d}\right)Q_s\right\} - A - F$$

$$= -\frac{i(c-k)(1-d)^2}{2D}\left\{Q_s^2 - 2\left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d}\right)Q_s\right.$$
$$\left. + \left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d}\right)^2\right\} + \frac{i(c-k)}{2D}\left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - q\right)^2 - A - F$$

$$= -\frac{i(c-k)(1-d)^2}{2D}\left\{Q_s - \left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d}\right)\right\}^2$$
$$+ \frac{i(c-k)}{2D}\left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - q\right)^2 - A - F \qquad (11)$$

จะเห็นได้ว่า G ในสมการ (11) จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $Q_s - \left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d}\right) = 0$ ดังนั้นปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด (Q_s^*) คือ

$$Q_s^* = \frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d}$$

และค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ (G^*) มีค่าเท่ากับ

$$G^* = \frac{i(c-k)}{2D}\left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k(1-d)\right] - q\right)^2 - A - F$$

$$= \frac{i(c-k)(1-d)^2}{2D}\left(\frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2A}{Q^*} + k(1-d)\right] - \frac{q}{1-d}\right)^2 - A - F$$

$$= \frac{i(c-k)(1-d)^2}{2D}(Q_s^*)^2 - A - F$$

$$= (A+F)\left[\frac{i(c-k)(1-d)^2}{2(A+F)D}(Q_s^*)^2 - 1\right]$$

$$= (A+F)\left[\frac{c-k}{c}\frac{(1-d)^2 ic}{2(A+F)D}(Q_s^*)^2 - 1\right]$$

$$= (A+F)\left[\frac{c-k}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 1\right]$$

ดังนั้นจากทั้งสองกรณี ($q = 0$ และ $0 < q \le (1-d)Q^*$) จึงได้ผลลัพธ์ที่แสดงในสมการ (2) และ (3) ตามลำดับ

หมายเหตุ 1. กรณีที่ $q = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q_s^* &= \frac{D}{i(c-k)(1-d)^2}\left[\frac{2(A+F)}{Q^*} + k(1-d)\right] \\ &= \frac{1}{c-k}\left(cQ^* + \frac{kD}{i(1-d)}\right) \\ &> Q^* \end{aligned}$$

ทำให้ $G^* > 0$ เสมอ ดังนั้นในกรณีนี้จึงควรจะสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษในปริมาณ Q_s^* หน่วยเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ซึ่งจะทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายรวมได้สูงสุดเท่ากับ $\frac{(A+F)(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*} - 1\right)^2$ และในกรณีที่ $0 < q \le (1-d)Q^*$ จะเห็นได้ว่า ถ้า $\frac{c-k}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 1 > 0$ แล้วจะได้ $G^* > 0$ ดังนั้นในกรณีนี้ถ้าต้องการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษในปริมาณ Q_s^* หน่วย ก็ต่อเมื่อ $\frac{c-k}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 1 > 0$ ซึ่งจะทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายรวมได้สูงสุดเท่ากับ $(A+F)\left[\frac{c-k}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 1\right]$

2. กรณีที่ $q = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{Q_s^*}{Q^*} &= \frac{1}{(c-k)Q^*}\left(cQ^* + \frac{kD}{i(1-d)}\right) \\ &= \frac{1}{c-k}\left(c + k\sqrt{\frac{cD}{2i(A+F)}}\right) \end{aligned}$$

ไม่ขึ้นอยู่กับค่าของ d และในกรณีที่ $0 < q \le (1-d)Q^*$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{Q_s^*}{Q^*} &= \frac{1}{(c-k)Q^*}\left(cQ^* + \frac{kD}{i(1-d)}\right) - \frac{q}{(1-d)Q^*} \\ &= \frac{1}{c-k}\left(c + k\sqrt{\frac{cD}{2i(A+F)}}\right) - \frac{q}{\sqrt{\frac{2(A+F)D}{ic}}} \end{aligned}$$

ไม่ขึ้นอยู่กับค่าของ d เช่นเดียวกัน ดังนั้นค่าของ G^* ในสมการ (3) จึงไม่ขึ้นกับค่าของ d

3. พิจารณาผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 1 จะเห็นได้ว่าในกรณีที่ $d = 0$ หรือไม่มีสินค้าชำรุดในระบบสินค้าคงคลัง ผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 1 จะเหมือนกับผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Tersine (1994) และผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Teerapanolarn and Thornsri (2014) ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรกที่ 1 ถ้า $d = 0$ แล้วปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ Q_s^* หน่วย เมื่อ

$$Q_s^* = \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right) - q, \ 0 \le q \le Q^* \tag{12}$$

โดยที่ $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}$ และค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุด คือ G^* เมื่อ

$$G^* = \begin{cases} \dfrac{A(c-k)}{c}\left(\dfrac{Q_s^*}{Q^*} - 1\right)^2, & q = 0 \\ A\left[\dfrac{c-k}{c}\left(\dfrac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 1\right], & 0 < q \le Q^* \end{cases} \tag{13}$$

การประยุกต์ใช้ผลการวิจัย

การประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 1 กับระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษในรูปของผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่สัมพันธ์กับผลลัพธ์ที่ได้ในทฤษฎีบทที่ 1 สามารถแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้อัตราความต้องการสินค้า $D = 3,000$ หน่วยต่อปี ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้า $A = 2,500$ บาทต่อครั้ง ค่าใช้จ่ายดำเนินการตรวจสอบสินค้า $F = 1,000$ บาทต่อครั้ง ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า $i = 10\%$ ของราคาสินค้าต่อหน่วยต่อปี ราคาของสินค้าที่สั่งซื้อ $c = 1,500$ บาทต่อหน่วย ส่วนต่างของราคาที่ลดลง $k = 300$ บาทต่อหน่วย โดยกำหนดสัดส่วนของสินค้าที่ชำรุด $d = 0.05, \ 0.10$ และ 0.15 และระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ $q = 0, \ 100$ และ 300 หน่วย ตามลำดับดังนั้นปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดและค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดสามารถแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดและค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดที่เปลี่ยนแปลงตามค่าของ d และ q ในตัวอย่างที่ 1

d	Q^* (หน่วย)	q (หน่วย)	Q_s^* (หน่วย)	G^* (บาท)
0.05	393.8587	0	8,387.0602	988,489.2261
		100	8,281.7970	1,058,156.8486
		300	8,071.2707	1,004,892.5708
0.10	415.7397	0	8,853.0080	988,489.2261
		100	8,741.8969	1,058,156.8486
		300	8,519.6746	1,004,892.5708
0.15	440.1950	0	9,373.7731	988,489.2261
		100	9,256.1261	1,058,156.8486
		300	9,020.8320	1,004,892.5708

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้อัตราความต้องการสินค้า $D = 6{,}000$ หน่วยต่อปี ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้า $A = 3{,}500$ บาทต่อครั้ง ค่าใช้จ่ายดำเนินการตรวจสอบสินค้า $F = 2{,}000$ บาทต่อครั้ง ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า $i = 5\%$ ของราคาสินค้าต่อหน่วยต่อปี ราคาของสินค้าที่สั่งซื้อ $c = 2{,}500$ บาทต่อหน่วย ส่วนต่างของราคาที่ลดลง $k = 500$ บาทต่อหน่วย โดยกำหนดสัดส่วนของสินค้าที่ชำรุด $d = 0.03,\ 0.08$ และ 0.12 และระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ $q = 0,\ 200,\ 400$ และ 600 หน่วยตามลำดับ ดังนั้นปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดและค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดสามารถแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2 ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดและค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดที่เปลี่ยนแปลงตามค่าของ d และ q ในตัวอย่างที่ 2

d	Q^* (หน่วย)	q (หน่วย)	Q_s^* (หน่วย)	G^* (บาท)
0.03	749.1094	0	31,864.2218	7,591,104.5106
		200	31,658.0362	7,852,828.2361
		400	31,451.8506	7,750,800.5857
		600	31,245.6651	7,649,439.6021
0.08	789.8218	0	33,595.9729	7,591,104.5106
		200	33,378.5816	7,852,828.2361
		400	33,161.1903	7,750,800.5857
		600	32,943.7990	7,649,439.6021
0.12	825.7228	0	35,123.0626	7,591,104.5106
		200	34,895.7899	7,852,828.2361
		400	34,668.5172	7,750,800.5857
		600	34,441.2444	7,649,439.6021

พิจารณาตัวอย่างที่ 1 และ 2 จะเห็นได้ว่าปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด (Q_s^*) แปรผันตามสัดส่วนของสินค้าที่ชำรุด (d) นั่นคือ เมื่อสัดส่วนสินค้าที่ชำรุดเพิ่มขึ้นปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย แต่ค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุด (G^*) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามสัดส่วนของสินค้าที่ชำรุด ซึ่งสอดคล้องกับหมายเหตุข้อที่ 2 นอกจากนี้ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดจะ แปรผันตามระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ (q) นั่นคือ เมื่อระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีระดับเพิ่มขึ้นปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบ

พิเศษเหมาะที่สุดมีค่าลดลง ยกเว้นในกรณีที่ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเท่ากับ 0 หน่วย ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดจะมีค่ามากที่สุด แต่ค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุดกลับมีค่าต่ำสุด

สรุปผลการวิจัย

การหาตัวแบบ EOQ หรือตัวแบบของปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายรวมได้สูงสุด โดยปรับปรุงหรือพัฒนาตัวแบบ EOQ ของ Teerapabolarn and Khamrod (2017) เพื่อให้สามารถประยุกต์ใช้ได้กับระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลังที่ต้องการ นอกจากนี้จะต้องทราบสัดส่วนที่แน่นอนของสินค้าที่ชำรุดทั้งหมด พร้อมกับมีการตรวจสอบสินค้าทั้งหมดทุกหน่วยหรือ 100% ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ ตัวแบบ EOQ ที่ได้สามารถนำไปประยุกต์ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังในสถานการณ์ที่มีสินค้าชำรุดและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยสามารถทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายรวมที่เกิดขึ้นในระบบสินค้าคงคลังได้สูงสุด

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล (งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2560 มหาวิทยาลัยบูรพา ผ่านสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 152/2560

เอกสารอ้างอิง

Grubbström, R. W. (1996). *Material Requirements Planning and Manufacturing Resource Planning*. International Encyclopedia of Business and Management. Routledge, London.

Huang, Y. F. (2003). The EOQ and EPQ models with backlogging and defective items using the algebraic approach. *Journal of Statistics and Management Systems, 6*(2), 171-180.

Salameh, M. K., & Jaber, M. Y. (2000). Economic production quantity model for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics*, *64*(1-3), 59-64.

Schwaller, R .L. (1988). EOQ under inspection costs. *Production and Inventory Management Journal*, *29*(3), 22-24.

Taleizadeh, A. A., Pentico, D. W., Aryanezhad, M., & Ghoreyshi, S. M. (2012). An economic order quantity model with partial backordering and a special sale price. *European Journal of Operational Research, 221*(3), 571-583.

Teerapabolarn, K, & Khamrod, S. (2017). The EOQ model with defective items and special sales price. *In Proceedings of Annual Pure and Applied Mathematics Conference* (pp. 31-40), Bangkok: Chulalongkorn University Press. (in Thai)

Teerapabolarn, K. & Thornsri, N. (2014). Determination of the EOQ model with special sales price by algebraic method. *Srinakharinwirot Science Journal*, *30*(1), 193-207. (in Thai)

Tersine, R. J. (1994). *Principles of Inventory and Materials Management*. Prentice-Hall, New Jersey.

Tu, Y. C., Huang, Y. F., Chen, W. K., & Chen, H. F. (2011). Using simple methods to derive EOQ and EPQ models with shortage and imperfect quality. *Journal of Information & Optimization Sciences*, *32*(6), 1333-1340.