ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์

A Note on Finite Integration Method for Solving Differential Equations

อารีนา ฮะซานี*

Areena Hazanee*

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science and Technology,

Prince of Songkla University, Pattani Campus

Received : 25 November 2017

Accepted : 5 February 2018

Published online : 8 February 2018

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อรวบรวมและนำเสนอระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ซึ่งได้จากการทบทวนวรรณกรรมในช่วงปี ค.ศ. 2013 ถึง 2016 โดยระเบียบวิธีการนี้ได้จากการนำเทคนิคการประมาณค่าปริพันธ์มาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จากการศึกษาพบว่าเทคนิคการประมาณค่าปริพันธ์หลายๆวิธีถูกนำมาประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดนี้ แต่สำหรับบทความนี้จะนำเสนอเฉพาะการประมาณค่าปริพันธ์ด้วยการประมาณเชิงเส้น (วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู) เท่านั้น ซึ่งการใช้การประมาณด้วยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูนี้จะสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ที่เป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่าง ขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จะเริ่มต้นพิจารณาจากการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ (อันดับที่หนึ่ง) แล้วนำมาประยุกต์ในการพิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n โดยการนำเมทริกซ์ปริพันธ์นี้ยกกำลัง n ซึ่งมีข้อดี คือ สามารถหลีกเลี่ยงความยุ่งยากของการหาผลเฉลยของอนุพันธ์อันดับต่างๆ ได้ด้วยการใช้เมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่งเพียงเมทริกซ์เดียวเป็นหลัก ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดนี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งที่ขึ้นกับเวลาและไม่ขึ้นกับเวลา สำหรับบทความนี้จะนำเสนอตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหนึ่งตัวแปรที่ขึ้นกับเวลา สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสองตัวแปรที่ไม่ขึ้นกับเวลา

คำสำคัญ : ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัด การประมาณค่าปริพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์

***Corresponding author. E-mail** : areena.hazanee@gmail.com

Abstract

The purpose of this article is to present the finite integration method (FIM) for solving n^{th} order differential equation. This article is a reviewed article based on articles published in 2013-2016. The FIM is established by using numerical integration for solving the differential equations. Many numerical integrations have been studied to apply with the FIM. But in this study, we focus on the ordinary linear approximation or the trapezoid rule as the numerical integration which can be formed to be the lower triangular matrix. The use of FIM starts at considering the integral matrix in order to be applied to solve the n^{th} order differential equation by using the n power of one integral matrix which is the advantage of this method, i.e. using only an (one layer) integral matrix to solve any n^{th} order differential equation. This FIM can be applied to solve the ordinary differential equation and the partial differential equation in both cases of time-dependent and independent. This article presents examples of using FIM for solving the ordinary differential equation, the time-dependent partial differential equation in one variable, and the partial differential equation in two variables.

Keywords : numerical method, finite integration method, numerical integration, differential equation

บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นรูปแบบสมการหรือตัวแบบทางคณิตศาสตร์ (mathematical model) ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ในปัญหาต่างๆ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ การแพทย์ หรือแม้กระทั่งการแก้ปัญหาทางด้านสิ่งแวดล้อม เป็นต้น สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation: ODE) และ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation: PDE) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation: ODE) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียว และสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation: PDE) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร โดยส่วนใหญ่สมการเชิงอนุพันธ์ที่ถูกนำมาสร้างเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ คือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนั้นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จึงเป็นหัวข้อหนึ่งที่สำคัญในการแก้ปัญหาต่างๆ ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยนั้นสามารถแยกได้เป็น 2 ประเภทหลัก คือ การหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ (mathematical analysis) เพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) และการหาผลเฉลยด้วยการประมาณเชิงตัวเลข (numerical analysis) เพื่อให้ได้ค่าประมาณของผลเฉลย

สำหรับการหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์นั้นมีหลายวิธี แต่อย่างไรก็ตามวิธีเหล่านี้จะมีข้อจำกัดในการประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาจริง กล่าวคือด้วยการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ทุกปัญหา ในขณะที่การหาผลเฉลยด้วยวิธีการประมาณเชิงตัวเลขนั้นเป็นวิธีที่นิยมมากในการประยุกต์ใช้เนื่องจากสามารถนำคอมพิวเตอร์มาคำนวณการประมาณค่าของผลเฉลยได้ซึ่งถือเป็นข้อดีสำหรับวิธีนี้ และเนื่องด้วยเป็นการยากที่จะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ให้อยู่ในรูปแบบปิด (closed form) ดังนั้นวิธีการประมาณเชิงตัวเลขจึงถูกพัฒนาขึ้นอย่างต่อเนื่องในการประมาณค่าผลเฉลยเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำและเชื่อถือได้มากที่สุดและค่าคลาดเคลื่อนที่ได้ยังสามารถเทียบกับค่า

คลาดเคลื่อนที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ หลักสำคัญในการพิจารณาเลือกระเบียบเชิงตัวเลขคือความแม่นยำของการประมาณค่าผลเฉลยซึ่งโดยทั่วไปจะขึ้นอยู่กับวิธีที่นำมาใช้ในการหาเฉลยและความละเอียด (จำนวน) ของข้อมูลที่นำมาพิจารณา ในปัจจุบันมีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมากมายที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (Lambert, 1991; Hairer, 1993; Boyce, 2001) ตัวอย่างเช่น ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (finite difference method: FDM) ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (finite element method: FEM) ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (finite volume method: FVM) และระเบียบวิธีสมาชิกค่าขอบ (boundary element method: BEM) เป็นต้น

บทความนี้เป็นการนำเสนอระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n โดยระเบียบวิธีที่นำเสนอนี้คิดค้นเมื่อปี ค.ศ.2013 โดย P.H. Wen และคณะ (Wen *et al.*, 2013) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีใหม่ที่ประยุกต์มาจากการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตและเรียกระเบียบวิธีนี้ว่า ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัด (finite integration method: FIM) ในขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ด้วยระเบียบวิธี FIM นี้สามารถพิจารณาจากเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่งกำลัง n กล่าวคือ พิจารณาการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่งเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้นสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ทำให้สามารถหลีกเลี่ยงความยุ่งยากของการหาผลเฉลยของอนุพันธ์อันดับต่างๆ ทั้งนี้ ระเบียบวิธี FIM ยังสามารถนำมาประยุกต์เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อีกด้วย P.H. Wen และคณะ (Wen *et al*., 2013) ได้นำเสนอการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ โดยนำเทคนิคการแปลงลาปลาซมาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนการคำนวณเชิงเวลาสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหา ในขณะที่การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสองมิติด้วยวิธี FIM ได้มีการศึกษาโดย M. Li และคณะ ในปี ค.ศ.2015 (Li *et al*., 2015) การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธี FIM ทั้งในบทความของ P.H. Wen และคณะ และบทความของ M. Li และคณะ (Wen *et al*., 2013 & Li *et al*., 2015) เป็นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี FIM ร่วมกับเทคนิคเชิงตัวเลข 2 แบบ คือ การนำวิธีการประมาณค่าปริพันธ์เชิงเส้น (ordinary linear approximation approach : OLA) ซึ่งคือกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoid rule) และอีกแบบคือการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันฐานหลักเรเดียล (radial basis function : RBF) เพื่อสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ สำหรับวิธีการนำการประมาณค่าปริพันธ์มาประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธี FIM ได้ถูกพัฒนาในปี ค.ศ. 2016 โดยเป็นการศึกษาการนำกฎของซิมป์สัน (Simpson’s rule), การปริพันธ์ของนิวตัน-โคตส์ (Newton-Cotes integral) และการประมาณค่าในช่วงลากรานจ์ (Lagrange interpolation) มาประยุกต์รวมกันเพื่อสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธี FIM ได้มีการศึกษาโดยประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีการประมาณค่าปริพันธ์ในหลายๆวิธี สำหรับบทความนี้จะนำเสนอการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี FIM บนพื้นฐานของการนำวิธี OLA (กฎสี่เหลี่ยมคางหมู) มาประยุกต์ใช้ เนื่องจากค้นพบว่าเมทริกซ์ปริพันธ์ที่สร้างจากวิธี OLA เป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่างทำให้มีความง่ายในการนำมาใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ และจากการศึกษาพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี OLA ให้ค่าความคลาดเคลื่อนไม่ต่างแตกต่างกันมากเมื่อเทียบกับวิธีการประมาณค่าปริพันธ์วิธีอื่นๆ

บทความวิชาการนี้จะนำเสนอการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ระเบียบวิธี FIM โดยจะเริ่มจากการนำเสนอการสร้างเมทริกซ์ (สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร) ในหัวข้อที่ 1 และหลังจากนั้นจะเป็นการนำเสนอการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในสองมิติ โดยเป็นการยกตัวอย่างการนำไปใช้ ซึ่งจะนำเสนอในหัวข้อที่ 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการสรุปการศึกษาระเบียบวิธี FIM ที่ได้กล่าวมาทั้งหมด

1. เมทริกซ์ปริพันธ์จำกัดสำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

ในการศึกษาระเบียบวิธี FIM จะเริ่มพิจารณาจากการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ซึ่งได้จากการนำวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้ โดยวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลขที่นำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษานี้คือ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งจะนำมาใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $u(x)$ เมื่อ $x \in \{a = x_1, x_2, x_3, ..., x_N = b\}$ และกำหนดให้

$$x_i = a + (i-1)\left(\frac{b-a}{N-1}\right), i \in \{1,2,3,...,N\} \tag{1}$$

สามารถเขียนการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข คือ $\int_a^b u(x)dx = \Delta x\left(\frac{u_1}{2} + u_2 + u_3 + ... + u_{N-1} + \frac{u_N}{2}\right)$ เมื่อ $\Delta x = \frac{b-a}{N-1}$ และ $u_i = u(x_i)$

พิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด $x \in [a,b]$ ใดๆ $U^{(1)}(x) = \int_a^x u(\xi)d\xi$ โดยการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขทำให้ได้การประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x_k เมื่อ $k \in \{1,2,3,...,N\}$ ดังนี้

$$U^{(1)}(x_k) = \int_a^{x_k} u(\xi)d\xi = \Delta x\left(\frac{u_1}{2} + u_2 + u_3 + ... + u_{k-1} + \frac{u_k}{2}\right) \tag{2}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ คือ $U^{(1)}(x_k) = \sum_{i=1}^{k} a_{ki}^{(1)} u_i$ เมื่อ $a_{1i}^{(1)} = 0$ และ $a_{ki}^{(1)} = \begin{cases} \Delta x/2 \; ; \; i = 1,k \\ \Delta x \quad ; \; i = 2,3,...,k-1 \end{cases}$

ดังนั้นจะได้การประมาณค่าปริพันธ์ในรูปของสมการเมทริกซ์ คือ

$$\underline{U}^{(1)} = A^{(1)}\underline{u} \tag{3}$$

เมื่อ $\underline{U}^{(1)} = \left[\int_a^{x_1} u(\xi)\mathrm{d}\xi, \int_a^{x_2} u(\xi)\mathrm{d}\xi, \int_a^{x_3} u(\xi)\mathrm{d}\xi, ..., \int_a^{x_N} u(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^T$, $\underline{u} = u(x_1), u(x_2), u(x_3), ..., u(x_N)^{\;T}$

และ $A^{(1)} = \Delta x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & .. \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(N\times N)}$ โดยเรียกเมทริกซ์ $A^{(1)}$ ว่า เมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่ง

พิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์สองชั้นจำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด $x \in [a,b]$ ใดๆ $U^{(2)}(x) = \int_a^x \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi d\xi_1$ โดยการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขทำให้ได้การประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x_k ดังนี้

$$U^{(2)}(x_k) = \int_a^{x_k} \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi d\xi_1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} a_{ki}^{(1)} a_{ij}^{(1)} u_i = \sum_{i=0}^{k} a_{ki}^{(2)} u_i \tag{4}$$

เมื่อ $a_{1i}^{(2)} = 0$ และ $a_{ki}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{4}[1+2(k-2)]\ \Delta x^{\ 2}\ ; & i = 1, \\ (k-i)\ \Delta x^{\ 2} & ;\ i = 2,3,\ldots,k-1, \\ \frac{1}{4}\ \Delta x^{\ 2} & ;\ i = k. \end{cases}$

ดังนั้นจะได้การประมาณค่าปริพันธ์สองชั้นในรูปของสมการเมทริกซ์ คือ

$$\underline{U}^{(2)} = A^{(2)} \underline{u} \tag{5}$$

เมื่อ $\underline{U}^{(2)} = \left[\int_a^{x_1} \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi d\xi_1, \int_a^{x_2} \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi d\xi_1, \int_a^{x_3} \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi d\xi_1, \ldots, \int_a^{x_N} \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi d\xi_1 \right]^T$

และ $A^{(2)} = \Delta x^{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 2 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1+2(N-2)}{4} & N-2 & N-3 & \ldots & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{(N\times N)}$

โดยเรียกเมทริกซ์ $A^{(2)}$ ว่าเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่สอง ในที่นี้ มีข้อสังเกตุหนึ่งที่น่าสนใจที่ได้จากการพิจารณาเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่ง $A^{(1)}$ และอันดับที่สอง $A^{(2)}$ คือ $A^{(2)} = A^{(1)} \times A^{(1)} = \left(A^{(1)}\right)^{2}$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์ n ชั้นจำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x_k จะได้ว่า

$$U^{(n)}(x_k) = \int_a^{x_k}\int_a^{\xi_{n-1}} \ldots \int_a^{\xi_1} u(\xi)d\xi \ldots d\xi_{n-2}d\xi_{n-1} = \sum_{i=1}^{k} a_{ki}^{(n)} u_i \tag{6}$$

พิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า การประมาณค่าปริพันธ์ n ชั้นข้างต้นสามารถคำนวณได้จากผลคูณของปริพันธ์อันดับที่หนึ่ง n ครั้ง นั่นคือ $A^{(n)} = \underbrace{A^{(1)} \cdot A^{(1)} \cdot A^{(1)} \cdot \ldots \cdot A^{(1)}}_{n \text{ ครั้ง.}} = \left(A^{(1)}\right)^{n}$ ทำให้ได้ว่าถ้ากำหนด $A^{(1)} = A$ จะได้ $A^{(n)} = A^{n}$

ดังนั้นการประมาณค่าปริพันธ์ n ในรูปของสมการเมทริกซ์สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$U^{(n)}(x_k) = A^{(n)}\underline{u} = A^{n}\underline{u} \tag{7}$$

จากกระบวนการข้างต้น สังเกตได้ว่าเมทริกซ์ปริพันธ์ $A^{(n)}$ นั้น คือเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่างซึ่งทำให้เมื่อนำไปพิจารณาในการแก้สมการเมทริกซ์เชิงเส้นในขั้นตอนการหาผลเฉลยของปัญหาทำได้ง่ายขึ้น สำหรับสมาชิกในแถวแรกของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นศูนย์ทุกตัวเมื่อนำไปพิจารณาในขั้นตอนการสร้างสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจะรวมกับ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกแถวแรกไม่เป็นศูนย์ทุกตัว จึงทำให้ไม่มีสมาชิกแถวใดเป็นศูนย์หมด โดยขั้นตอนการพิจารณาการสร้างสมการเมทริกซ์เชิงเส้นนี้จะนำเสนอในหัวข้อถัดไป

2. ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี FIM ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n (สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ที่ขึ้นกับตัวแปรเดียว) สามารถทำได้โดยการหาปริพันธ์ n ชั้นของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ที่สนใจ ซึ่งการดำเนินการนี้จะทำให้สามารถหาผลเฉลยของฟังก์ชันไม่ทราบค่าได้ แต่พจน์ของฟังก์ชันทราบค่าอื่นๆจะอยู่ในรูปของปริพันธ์แทน อย่างไรก็ตาม เราสามารถประมาณพจน์ที่อยู่ในรูปปริพันธ์นี้ได้ด้วยสมการเมทริกซ์ (7) และเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจในการ

ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี FIM ในการหาผลเฉลยของสมการ ODE เราจะศึกษาจากตัวอย่างของสมการ ODE อันดับที่สี่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{d^4u}{dx^4}+f(x)\frac{d^2u}{dx^2}+g(x)u=h(x),\ 0\leq x\leq L \tag{8}$$

เมื่อ $u=u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $f(x),g(x),h(x)$ เป็นฟังก์ชันทราบค่า พร้อมด้วยเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $u(0)=\alpha_0$, $\frac{du}{dx}(0)=\alpha_1$, $\frac{d^2u}{dx^2}(0)=\alpha_2$ และ $\frac{d^3u}{dx^3}(0)=\alpha_3$ พิจารณาการหาปริพันธ์ 4 ชั้นของสมการ ODE (8) จะได้ว่า

$$\underline{u}+A^2F\underline{u}+A^4G\underline{u}=A^4\underline{h}+\frac{1}{6}c_0\underline{x}^{(3)}+\frac{1}{2}c_1\underline{x}^{(2)}+c_2\underline{x}^{(1)}+c_3\underline{i} \tag{9}$$

เมื่อ $\underline{u}=\left[u(x_1),u(x_2),\dots,u(x_N)\right]^T$, $F=diag\left[f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_N)\right]$, $G=diag\left[g(x_1),g(x_2),\dots,g(x_N)\right]$, $\underline{h}=\left[h(x_1),h(x_2),\dots,h(x_N)\right]^T$, $\underline{x}^{(3)}=\left[x_1^3,x_2^3,\dots,x_N^3\right]^T$, $\underline{x}^{(2)}=\left[x_1^2,x_2^2,\dots,x_N^2\right]^T$, $\underline{x}^{(1)}=\left[x_1,x_2,\dots,x_N\right]^T$, $\underline{i}=\left[1,1,1,\dots,1\right]^T$, c_0,c_1,c_2,c_3 เป็นค่าคงที่ของการปริพันธ์

จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $\frac{du}{dx}(0)=\alpha_1$ จะได้ $u_1=\alpha_0$ พิจารณาการหาปริพันธ์ 3 ชั้นของสมการ ODE (8) จะได้

$$\frac{du}{dx}+\int f(x)u(x)dx+\iiint g(x)u(x)dxdxdx=\iiint h(x)dxdxdx+\frac{1}{2}c_0x^2+c_1x+c_2$$

นั่นคือเมื่อพิจารณาที่ $x=0$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $\frac{du}{dx}(0)=\alpha_1$ จะได้การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธี FIM คือ

$$\alpha_1+\sum_{i=1}^{1}a_{1i}^{(1)}f_iu_i+\sum_{i=1}^{1}a_{1i}^{(3)}g_iu_i=\sum_{i=1}^{1}a_{1i}^{(3)}h_i+c_2$$

เนื่องจาก $a_{1i}^{(1)}=a_{1i}^{(3)}=0$ จะได้ $\alpha_1=c_2$ พิจารณาการหาปริพันธ์ 2 ชั้น และ 1 ชั้นในทำนองเดียวกันร่วมกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $\frac{d^2u}{dx^2}(0)=\alpha_2$ และ $\frac{d^3u}{dx^3}(0)=\alpha_3$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$u_1=\alpha_0,\ \ \alpha_1=c_2,\ \ f(0)\alpha_0+\alpha_2=c_1 \text{ และ } f(0)\alpha_1+\alpha_3=c_0 \tag{10}$$

จากสมการ (9) และ (10) จะได้ สมการเมทริกซ์ของระบบสมการเชิงเส้น N+4 สมการ N+4 ตัวแปร ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccccc:cccc} & & & & & -x_1^3 & -x_1^2 & -x_1 & -1 \\ & & & & & -x_2^3 & -x_2^2 & -x_2 & -1 \\ & & I+A^2F+A^4G & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & -x_N^3 & -x_N^2 & -x_N & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \\ \hdashline c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \\ A^4\underline{h} \\ \\ \hdashline \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ f_1\alpha_0+\alpha_2 \\ f_1\alpha_1+\alpha_3 \end{array}\right] \tag{11}$$

ดังนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการ ODE โดยการแก้สมการเมทริกซ์ (11)

3. ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ขึ้นกับเวลา

การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี FIM ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ n ที่ขึ้นกับเวลา เราจะศึกษาจากตัวอย่างของสมการความร้อนดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t),\ 0<x<L,\ 0<t\le\tau \tag{12}$$

เมื่อ $u=u(x,t)$ แทนพลังงานความร้อน (ฟังก์ชันไม่ทราบค่า) และ $f(x,t),g(x,t)$ แทนสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (heat transfer coefficient) และแหล่งต้นกำเนิดความร้อน (heat source) ตามลำดับ ซึ่งเป็นฟังก์ชันทราบค่า พร้อมด้วยเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบ ดังนี้

$$\begin{aligned} &u(\mathrm{x},0)=\beta,\ 0\le x\le L, \\ &u(0,\mathrm{t})=\alpha_0,\ u(\mathrm{L},\mathrm{t})=\alpha_L,\ 0\le t\le\tau \end{aligned} \tag{13}$$

ในที่นี้ กำหนดให้ $t\in\{0=t_1,t_2,t_3,\dots,t_T=\tau\}$ ดังเช่นเดียวกับการกำหนดค่า x ในสมการ (1) และประมาณค่าพลังงานความร้อนด้วย $u(x,t)=u(x_i,t_j)=\mathrm{u}_i^j$

พิจารณาสมการความร้อน (12) โดยการประมาณค่าอนุพันธ์ที่ขึ้นกับเวลาด้วยระเบียบวิธี FDM นั่นคือ $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t_j)=\dfrac{1}{\kappa}\ u^{j+1}(x)-u^j(x)$ เมื่อ $\kappa=\dfrac{T}{\tau-1}$ และ $j\in\{1,2,3,\dots,\tau-1\}$ โดยการประมาณค่าฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาทำให้ได้สมการ ODE ดังนี้

$$\frac{1}{\kappa}u^{j+1}(x)=\frac{1}{\kappa}u^{j}(x)+f^{j}(x)\frac{d^{2}u^{j}}{dx^{2}}+g^{j}(x) \tag{14}$$

เมื่อ $u^{j}(x)=u(x,t_{j})$ และประมาณค่าปริพันธ์ 2 ชั้นของสมการ (14) จะได้ว่า

$$\frac{1}{\kappa}A^{2}\underline{u}^{j+1}=\frac{1}{\kappa}A^{2}\underline{u}^{j}+F^{j}\underline{u}^{j}+A^{2}\underline{g}^{j}+c_{0}\underline{x}+c_{1}\underline{i} \tag{15}$$

เมื่อ $\underline{u}^{j+1}=\left[u_{1}^{j+1},u_{2}^{j+1},...,u_{N}^{j+1}\right]^{T}$, $\underline{u}^{j}=\left[u_{1}^{j},u_{2}^{j},...,u_{N}^{j}\right]^{T}$, $F^{j}=diag\ f_{1}^{j},f_{2}^{j},...,f_{N}^{j}$, $\underline{g}^{j}=\left[g_{1}^{j},g_{2}^{j},...,g_{N}^{j}\right]^{T}$,

$\underline{x}=\ x_{1},x_{2},...,x_{N}\ ^{T}$ และ $u_{i}^{j}=u(x_{i},t_{j})$, $f_{i}^{j}=f(x_{i},t_{j})$, $g_{i}^{j}=g(x_{i},t_{j})$,

และจากเงื่อนไขค่าขอบ จะได้ว่า

$$u_{1}^{j}=\alpha_{0}\ \text{และ}\ u_{L}^{j}=\alpha_{L} \tag{16}$$

จากสมการ (15) และ (16) จะได้ สมการเมทริกซ์ของระบบสมการเชิงเส้น *N*+2 สมการ *N*+2 ตัวแปร ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccccc:cc} & & & & & -x_{1} & -1\\ & & & & & -x_{2} & -1\\ & & \frac{1}{\kappa}A^{2}G & & & -x_{3} & -1\\ & & & & & ... & ...\\ & & & & & -x_{N} & -1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}u_{1}^{j+1}\\ u_{2}^{j+1}\\ u_{3}^{j+1}\\ ...\\ u_{N}^{j+1}\\ \hdashline c_{0}\\ c_{1}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\\ \frac{1}{\kappa}A^{2}\underline{u}^{j}+F^{j}\underline{u}^{j}+A^{2}\underline{g}^{j}\\ \\ \hdashline \alpha_{0}\\ \alpha_{L}\end{array}\right] \tag{17}$$

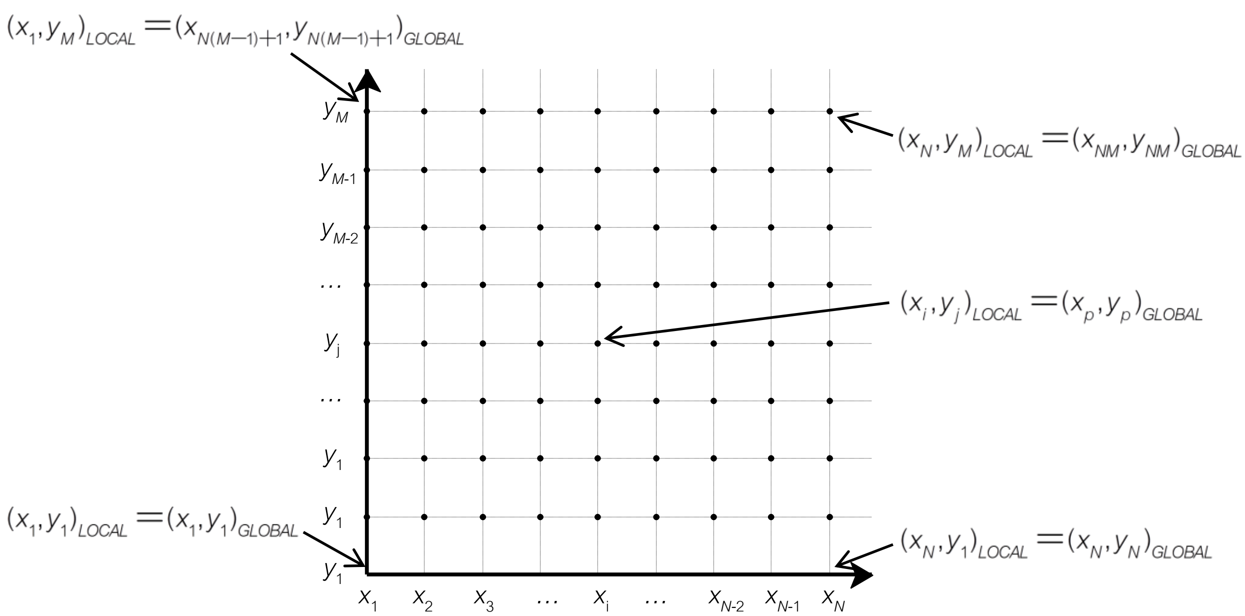
ดังนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของปัญหานี้ได้โดยการนำเงื่อนไขเริ่มต้น (13) ซึ่งประมาณด้วย $\underline{u}^{1}=\beta$ มาแทน $\underline{u}^{j}$ ในเมทริกซ์ทางขวามือของสมการ (17) เมื่อ j = 1 เพื่อคำนวณหา $\underline{u}^{2}$ ($\underline{u}^{j+1}$ เมื่อ j = 1) โดยการแก้สมการเมทริกซ์ (17) จากนั้นจึงพิจารณาการคำนวณหาค่า $\underline{u}^{3}$ โดยกำหนด j = 2 และแทนค่า $\underline{u}^{j}$ ด้วย $\underline{u}^{2}$ ที่คำนวณได้จากขั้นตอนก่อนหน้า ดำเนินการคำนวณค่า $\underline{u}^{j+1}$ โดยแทนค่า $\underline{u}^{j}$ ที่คำนวณได้จากขั้นตอนก่อนหน้าเช่นนี้ไปเรื่อยๆจน j = T - 1 นั่นคือ สามารถคำนวณหาค่า $\underline{u}^{T}$ ซึ่งคือผลเฉลยของปัญหานี้ โดยกระบวนการคำนวณค่าซ้ำๆเช่นนี้ เราจะเรียกว่า กระบวนการทำซ้ำ (iterative method)

4. ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในสองมิติ

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในสองมิติ โดยจะเริ่มศึกษาจากการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์จำกัดสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรก่อน ซึ่งวิธีการหลักๆในการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ในสองมิตินี้จะคล้ายกับการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ในหนึ่งมิติที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อแรก

พิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $u=u(x,y)$ และกำหนดจุด $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ เมื่อ $x\in\{a=x_1,x_2,x_3,...,x_N=b\}$ และ $y\in\{c=y_1,y_2,y_3,...,y_M=d\}$ ในที่นี้เราจะใช้การนับจำนวนจุดโหนด (x_i,y_j) ใดๆ แบบวงกว้าง (global numbering system) และสำหรับการพิจารณาปริพันธ์เทียบกับ x ได้จุดโหนด $(x_i,y_j)_{LOCAL}=(x_p,y_p)_{GLOBAL}$ ดังภาพที่ 1 โดยความสัมพันธ์ของจุดโหนดเฉพาะที่ (local node) และจุดโหนดวงกว้าง (global node) สามารถคำนวณได้จาก

$$p=N(j-1)+i \tag{18}$$



ภาพที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดโหนดเฉพาะที่และจุดโหนดวงกว้างสำหรับปริพันธ์เทียบกับ x

พิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตสำหรับฟังก์ชันสองมิติ $u(x,y)$ เทียบกับ x จากจุด a ถึงจุด $x\in[a,b]$ ใดๆ $U^{(1,x)}(x,y)=\int_a^x u(\xi,y)d\xi$ โดยการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขทำให้ได้การประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x_p นั่นคือ $U^{(1,x)}(x_p,y_p)=\int_a^{x_p} u(\xi,y_p)d\xi$ ซึ่งสำหรับ $(x_p,y_p)_{GLOBAL}$ ที่สอดคล้องกับ $(x_i,y_j)_{LOCAL}$ จากการคำนวณด้วยความสัมพันธ์ (18) สามารถประมาณค่าปริพันธ์ได้ ดังนี้

$$U^{(1,x)}(x_p,y_p)=\Delta x\left(\frac{u_{1,1}}{2}+u_{1,2}+...+\frac{u_{1,j}}{2}\right)+\Delta x\left(\frac{u_{2,1}}{2}+u_{2,2}+...+\frac{u_{2,j}}{2}\right)+...+\Delta x\left(\frac{u_{i,1}}{2}+u_{i,2}+...+\frac{u_{i,j}}{2}\right) \quad (19)$$

เมื่อ $u_{i,j}=u(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_j)_{LOCAL}$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{(N-1)}$ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป (แบบวงกว้าง) ได้คือ

$$U^{(1,x)}(x_p,y_p)=\sum_{i=1}^{p}a_{pi}^{(1,x)}u_i \quad \text{เมื่อ} \quad u_i=u(x_i,y_i)_{GLOBAL} \quad (20)$$

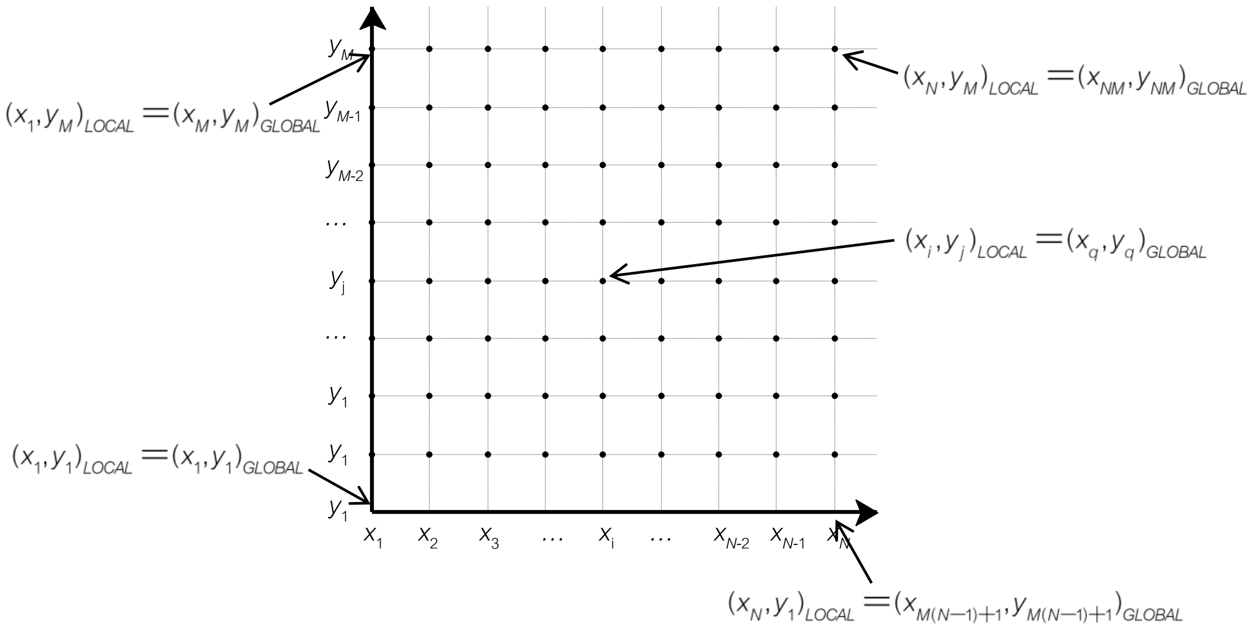
ดังนั้น จะได้เมทริกซ์ปริพันธ์จำกัดเขตเทียบกับ x คือ

$$\underline{U}^{(1,x)}=A^{(1,x)}\underline{u} \quad (21)$$

เมื่อ $\underline{U}^{(1,x)}=\left[\int_a^{x_1}u(\xi,y_1)d\xi,\int_a^{x_2}u(\xi,y_2)d\xi,...,\int_a^{x_{MN}}u(\xi,y_{NM})d\xi\right]^T$, $\underline{u}=u(x_1,y_1),u(x_2,y_2),...,u(x_{NM},y_{NM})^T$
และ $A^{(1,x)}=[diag(A,A,...,A)]_{(NM)\times(NM)}$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยมีแนวบล็อกทแยงมุมเป็นเมทริกซ์ปริพันธ์ A ขนาด $N\times N$ ตามที่ได้นิยามไปแล้วในหัวข้อแรกจำนวน M บล็อก

สำหรับการพิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตสำหรับฟังก์ชันสองมิติ $u(x,y)$ เทียบกับ y จากจุด c ถึงจุด $y\in[c,d]$ ใดๆ $\tilde{U}^{(1,y)}(x,y)=\int_c^y\tilde{u}(x,\eta)d\eta$ โดยประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่กำหนด $(x_i,y_j)_{LOCAL}=(\tilde{x}_q,\tilde{y}_q)_{GLOBAL}$ และความสัมพันธ์ของจุดโหนดเฉพาะที่และจุดโหนดแบบวงกว้างดังภาพที่ 2 สามารถคำนวณได้จาก

$$q=M(i-1)+j \quad (22)$$



***ภาพที่** 2* แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดโหนดเฉพาะที่และจุดโหนดวงกว้างสำหรับปริพันธ์เทียบกับ *y*

นั่นคือ $\tilde{U}^{(1,y)}(x_q,y_q)=\int_c^{y_q}\tilde{u}(x_q,\eta)d\eta$ และเช่นเดียวกับการประมาณค่าปริพันธ์เทียบกับ x สำหรับ $(x_q,y_q)_{GLOBAL}$ ที่สอดคล้องกับ $(x_i,y_j)_{LOCAL}$ จากการคำนวณด้วยความสัมพันธ์ (22) สามารถประมาณค่าปริพันธ์ได้ ดังนี้

$$\tilde{U}^{(1,y)}(x_q,y_q)=\Delta y\left(\frac{u_{1,1}}{2}+u_{2,1}+...+\frac{u_{i,1}}{2}\right)+\Delta y\left(\frac{u_{1,2}}{2}+u_{2,2}+...+\frac{u_{i,2}}{2}\right)+...+\Delta y\left(\frac{u_{1,j}}{2}+u_{2,j}+...+\frac{u_{i,j}}{2}\right) \quad (23)$$

เมื่อ $u_{i,j}=u(x_i,y_j)_{LOCAL}$, $\Delta y=\dfrac{d-c}{(M-1)}$ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป (แบบวงกว้าง) ได้คือ

$$\tilde{U}^{(1,y)}(x_q,y_q)=\sum_{i=1}^{q}a_{qi}^{(1,y)}\tilde{u}_i \quad \text{เมื่อ} \quad \tilde{u}_i=\tilde{u}(x_i,y_i)_{GLOBAL} \quad (24)$$

ดังนั้น จะได้เมทริกซ์ปริพันธ์จำกัดเขตเทียบกับ *y* คือ

$$\underline{\tilde{U}}^{(1,y)}=\tilde{A}^{(1,y)}\underline{\tilde{u}} \quad (25)$$

เมื่อ $\underline{\tilde{U}}^{(1,y)} = \left[\int_c^{y_1} \tilde{u}(x_1,\eta)d\eta, \int_c^{y_2} \tilde{u}(x_2,\eta)d\eta, ..., \int_c^{y_{MN}} \tilde{u}(x_{NM},\eta)d\eta\right]^T$, $\underline{\tilde{u}} = \tilde{u}(x_1,y_1), \tilde{u}(x_2,y_2), ..., \tilde{u}(x_{NM},y_{NM})^{\ T}$,

$\tilde{A}^{(1,y)} = [diag(\tilde{A},\tilde{A},...,\tilde{A})]_{(NM)\times(NM)}$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยมีแนวบล็อกทแยงมุมเป็นเมทริกซ์ปริพันธ์ $\tilde{A}$

และ $\tilde{A} = \Delta y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & .. \\ 1/2 & 1 & 1 & ... & 1 & 1/2 \end{bmatrix}_{(M\times M)}$

เพื่อความสะดวกในการพิจารณาการปริพันธ์สองมิติ เราจะทำการจัดเรียงใหม่โดยกำหนดให้เวกเตอร์ $\underline{\tilde{u}}$ ในสมการ (25) มีการจัดเรียงเช่นกับเวกเตอร์ $\underline{u}$ ในสมการ (23) ได้ว่า

$$\underline{U}^{(1,y)} = A^{(1,y)}\underline{u} \tag{26}$$

เมื่อ $A^{(1,y)}$ เป็นเทริกซ์ขนาด $NM \times NM$ ที่มีการจัดเรียงใหม่ที่สอดคล้องกับสมการเมริกซ์ (25) และเวกเตอร์ $\underline{u}$ ในสมการ (23)

ต่อไปเป็นการพิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์สองชั้นจำกัดเขตสำหรับฟังก์ชันสองมิติ $u(x,y)$ เทียบกับ x จากจุด a ถึงจุด $x \in [a,b]$ ใดๆ $U^{(2,x)}(x,y) = \int_a^x \int_a^{\xi_1} u(\xi,y)d\xi d\xi_1$ โดยการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขทำให้ได้การประมาณค่าปริพันธ์สองชั้นจำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x_p นั่นคือ $U^{(2,x)}(x_p,y_p) = \int_a^{x_p} \int_a^{\xi_1} u(\xi,y_p)d\xi d\xi_1$ ซึ่งสำหรับ $(x_p,y_p)_{GLOBAL}$ ที่สอดคล้องกับ $(x_i,y_j)_{LOCAL}$ สามารถประมาณค่าปริพันธ์ที่เขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป (แบบวงกว้าง) ได้คือ

$$U^{(2,x)}(x_p,y_p) = \int_a^{x_p} \int_a^{\xi_1} u(\xi,y_p)d\xi d\xi_1 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i} a_{pj}^{(1,y)} a_{ji}^{(1,y)} u_i \quad \text{เมื่อ} \quad i,j \in \{1,2,3,...,NM\} \tag{27}$$

ดังนั้น จะได้เมทริกซ์ปริพันธ์สองชั้นจำกัดเขตเทียบกับ x คือ

$$\underline{U}^{(2,x)} = A^{(2,x)}\underline{u} = \ A^{(1,x)} \ ^2 \underline{u} \tag{28}$$

เมื่อ $\underline{U}^{(2,x)} = \left[\int_a^{x_1}\int_a^{\xi_1} u(\xi,y_1)d\xi d\xi_1, \int_a^{x_2}\int_a^{\xi_1} u(\xi,y_2)d\xi d\xi_1, ..., \int_a^{x_{NM}}\int_a^{\xi_1} u(\xi,y_{NM})d\xi d\xi_1\right]^T$

และ $A^{(2,x)} = [diag(A^2,A^2,...,A^2)]_{(NM)\times(NM)}$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยมีแนวบล็อกทแยงมุมเป็นเมทริกซ์ปริพันธ์ A^2

และในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์สองชั้นจำกัดเขตสำหรับฟังก์ชันสองมิติ $u(x,y)$ เทียบกับ y จากจุด c ถึงจุด $y\in[c,d]$ ใดๆ $\tilde{U}^{(2,x)}(x,y)=\int_c^y\int_c^{\eta_1}u(x,\eta)d\eta d\eta_1$ โดยการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่กำหนด $(x_i,y_j)_{LOCAL}=(\tilde{x}_q,\tilde{y}_q)_{GLOBAL}$ สามารถประมาณค่าปริพันธ์ที่เขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป (แบบวงกว้าง) ได้คือ

$$\tilde{U}^{(2,y)}(x_q,y_q)=\int_c^{y_q}\int_c^{\eta_1}\tilde{u}(x_q,\eta)d\eta d\eta_1=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{i}a_{qj}^{(1,y)}a_{ji}^{(1,y)}\tilde{u}_i \quad \text{เมื่อ} \quad i,j\in\{1,2,3,...,NM\} \tag{29}$$

ดังนั้น จะได้เมทริกซ์ปริพันธ์สองชั้นจำกัดเขตเทียบกับ y คือ

$$\underline{\tilde{U}}^{(2,y)}=\tilde{A}^{(2,y)}\underline{\tilde{u}} \tag{30}$$

เมื่อ $\underline{\tilde{U}}^{(2,y)}=\left[\int_c^{y_1}\int_c^{\eta_1}\tilde{u}(x_1,\eta)d\eta d\eta_1,\int_c^{y_2}\int_c^{\eta_1}\tilde{u}(x_2,\eta)d\eta d\eta_1,...,\int_c^{y_{NM}}\int_c^{\eta_1}\tilde{u}(x_{NM},\eta)d\eta d\eta_1\right]^T$,
และ $\tilde{A}^{(2,y)}=[diag(\tilde{A}^2,\tilde{A}^2,...,\tilde{A}^2)]_{(NM)\times(NM)}$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยมีแนวบล็อกทแยงมุมเป็นเมทริกซ์ปริพันธ์ $\tilde{A}^2$ เมื่อจัดเรียงใหม่จะได้เมทริกซ์สำหรับปริพันธ์สองชั้นในรูปของเวกเตอร์ $\underline{u}$ ดังนี้

$$\underline{U}^{(2,y)}=A^{(2,y)}\underline{u}=\left(A^{(1,y)}\right)^2\underline{u} \tag{31}$$

เมื่อ $A^{(2,y)}$ เป็นเทริกซ์ขนาด $NM\times NM$ ที่มีการจัดเรียงใหม่ที่สอดคล้องกับสมการเมริกซ์ (30) และเวกเตอร์ $\underline{u}$ ในสมการ (28)

สำหรับการพิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต n ชั้นสำหรับฟังก์ชันสองตัว สามารถพิจารณาโดยแยกการพิจารณาดังนี้ พิจารณาเทียบกับ x จากจุด a ถึงจุด x_k ได้ว่า $U^{(n,x)}(x_p,y_p)=\int_a^{x_p}\int_a^{\xi_{n-1}}...\int_a^{\xi_1}u(\xi,y_p)d\xi...d\xi_{n-2}d\xi_{n-1}=\sum_{i=1}^{p}a_{pi}^{(n)}u_i$ และพิจารณาเทียบกับ y จากจุด c ถึงจุด y_k ได้ว่า $\tilde{U}^{(n,y)}(x_q,y_q)=\int_c^{y_q}\int_c^{\eta_{n-1}}...\int_c^{\eta_1}\tilde{u}(x_q,\eta)d\eta...d\eta_{n-2}d\eta_{n-1}=\sum_{i=1}^{q}a_{qi}^{(n,y)}\tilde{u}_i$ โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ได้

$$\underline{U}^{(n,x)}=A^{(n,x)}\underline{u}=\left(A^{(1,x)}\right)^n\underline{u} \qquad \text{และ} \qquad \underline{\tilde{U}}^{(n,y)}=\tilde{A}^{(n,y)}\underline{\tilde{u}} \tag{32}$$

ซึ่งสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์เทียบกับ y สามารถจัดเรียงใหม่ได้เป็น $\underline{U}^{(n,y)}=A^{(n,y)}\underline{u}=\left(A^{(1,y)}\right)^n\underline{u}$

และสุดท้าย เราจะสามารถพิจารณาปริพันธ์หลายชั้นสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y ได้ดังนี้

$$U^{(n_1 n_2)}(x_k, y_k) = \int_c^{y_k} \int_c^{\eta_{n_2-1}} \cdots \int_c^{\eta_1} \int_a^{x_k} \int_a^{\xi_{n_1-1}} \cdots \int_a^{\xi_1} u(\xi,\eta) \underbrace{d\xi \ldots d\xi_{n_1-2} d\xi_{n_1-1}}_{n_1\ LAYERS} \underbrace{d\eta \ldots d\eta_{n_2-2} d\eta_{n_2-1}}_{n_2\ LAYERS} \tag{33}$$

และได้เมทริกซ์ปริพันธ์หลายชั้น ดังนี้

$$U^{(n_1 n_2)}(x_k, y_k) = A^{(n_1,x)} A^{(n_2,y)} \underline{u} = A^{(1,x)\ n_1} A^{(1,y)\ n_2} \underline{u} \tag{34}$$

จากกระบวนการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรข้างต้น เราสามารถนำเมทริกซ์ที่ได้มาประยุกต์ใช้สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ ดังตัวอย่างของสมการปัวซง (Poisson's equation) ต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y),\ 0 < x, y < L \tag{35}$$

เมื่อ $u = u(x,y)$ แทนระยะกระจัด (displacement) ของประจุไฟฟ้า (ฟังก์ชันไม่ทราบค่าที่ต้องการหาผลเฉลย) และ $f(x,y)$ แทนความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า (electric charge) ซึ่งเป็นฟังก์ชันทราบค่า พร้อมด้วยเงื่อนไขค่าขอบ $u(x,0) = \beta_0$, $u(x,L) = \beta_L$ เมื่อ $0 \le x \le L$ และ $u(0,y) = \alpha_0$, $u(L,y) = \alpha_L$ เมื่อ $0 \le y \le L$ พิจารณาสมการปัวซง (35) โดยการปริพันธ์สองชั้นเทียบกับ x และ y ตามลำดับ ทำให้ได้ว่า $\iint\iint \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] dxdxdydy = \iint\iint f(x,y) dxdxdydy$ นั่นคือ

$$A^{(2,x)}\underline{u} + A^{(2,y)}\underline{u} = A^{(2,x)}A^{(2,y)}\underline{f} + \mathrm{X}\Psi_y \underline{c}_{0,x} + \Psi_y \underline{c}_{1,x} + \mathrm{Y}\Psi_x \underline{c}_{0,y} + \Psi_x \underline{c}_{1,y} \tag{36}$$

เมื่อ X, Y เป็นเวกเตอร์แถวขนาด NM ของโหนด x และ y ตามลำดับ

Ψ_x, Ψ_y เป็นเมทริกซ์ขนาด $NM \times N$ และ $NM \times M$ ของฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ของ x และ y ตามลำดับ

$\underline{c}_{0,x}, \underline{c}_{1,x}$ และ $\underline{c}_{0,y}, \underline{c}_{1,y}$ เป็นเวกเตอร์ขนาด N และ M ของฟังก์ชันที่ได้จากการปริพันธ์ที่ขึ้นกับ x และ y ตามลำดับ

โดยที่ $X = [x_1, x_2, \ldots, x_{NM}]$, $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_{NM}]$ $\underline{c}_{0,x} = [c_{0,x}^1, c_{0,x}^2, \ldots, c_{0,x}^r]^T$, $\underline{c}_{1,x} = [c_{1,x}^1, c_{1,x}^2, \ldots, c_{1,x}^r]^T$,

$\underline{c}_{0,y} = [c_{0,y}^1, c_{0,y}^2, \ldots, c_{0,y}^s]^T$, $\underline{c}_{1,y} = [c_{1,y}^1, c_{1,y}^2, \ldots, c_{1,y}^s]^T$

และเมื่อพิจารณาร่วมกับเงื่อนไขค่าขอบ ทำให้ได้ว่า

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} \multicolumn{4}{c:}{A^{(2,x)}+A^{(2,y)}} & \mathrm{X}\Psi_y & \Psi_y & \mathrm{Y}\Psi_x & \Psi_x \\ \hdashline I_N & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathrm{I}_0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots\ \mathrm{I}_0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & I_N & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \underline{u} \\ \hdashline \underline{c}_{0,x} \\ \underline{c}_{1,x} \\ \underline{c}_{0,y} \\ \underline{c}_{1,y} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} A^{(2,x)}A^{(2,y)}\underline{f} \\ \hdashline \underline{\beta}_L \\ \underline{\beta}_L \\ \underline{\alpha}_0 \\ \underline{\alpha}_L \end{array}\right] \tag{37}$$

เมื่อ I_N เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด N และ $\mathrm{I}_0 = diag(1,0,...,0,1)$ เป็นเมทริกซ์แนวทแยงขนาด N ดังนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบของสมการปัวซงนี้ได้โดยการแก้สมการเมทริกซ์ (37)

บทสรุป

บทความวิชาการฉบับนี้ได้นำเสนอการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งที่ขึ้นกับเวลาและไม่ขึ้นกับเวลาด้วยระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดซึ่งเป็นการนำการประมาณค่าปริพันธ์เชิงเส้นหรือกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมาสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับหนึ่ง สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n มีหลักในการดำเนินการคือการปริพันธ์สมการเชิงอนุพันธ์ n ครั้งซึ่งจะทำให้สามารถประมาณการปริพันธ์นี้ด้วยเมทริกซ์ปริพันธ์กำลัง n และเกิดระบบสมการเชิงเส้นขึ้น ดังนั้นจึงสามารถหาผลเฉลยได้โดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ทั้งนี้ข้อดีของการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัด คือ สามารถหลีกเลี่ยงความยุ่งยากของการหาผลเฉลยของอนุพันธ์อันดับต่างๆ ได้ด้วยการใช้เมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่งเพียงเมทริกซ์เดียวเป็นหลัก

เอกสารอ้างอิง

Boyce, W. E., DiPrima, R. C. (2001). *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*, New York: John Wiley & Sons.

Hairer, E. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations, vol. 1 and 2*, Berlin-New York: Springer-Verlag.

Lambert, J. D. (1991). *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*, New York: John Wiley & Sons.

Li, M., Chen, C. S., Hon, Y. C., & Wen, P. H. (2015). Finite integration method for solving multi-dimensional partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, *39,* 4979-4994.

Li, M., Tian, Z. L., Hon, Y. C., Chen, C. S., & Wen, P. H. (2016). Improved finite integration method for partial differential equations. *Engineering Analysis with Boundary Element*, *64*, 230-236.

Wen, P. H., Hon, Y. C., Li, M., & Korakianitis, T. (2013). Finite integration method for partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, *37*, 10092-10106.