การเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่ม ในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล

Comparison on Confidence Intervals for Variance of Random Effect in Unbalanced Hierarchical Model

สมพร จิรธรรมประดับ*, ธิดาพร ศุภภากร และ จุฑาภรณ์ สินสมบูรณ์ทอง

Somporn Jiratampradab*, Thidaporn Supapakorn and Juthaphorn Sinsomboonthong

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University

Received : 28 January 2019

Revised : 7 March 2019

Accepted : 9 May 2019

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษา และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล 3 วิธี คือ วิธี TG (Ting *et al*., 1990) วิธี PB (Park *et al*., 2003) และวิธี LL (Li *et al*., 2005) โดยพิจารณาค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ กำหนดให้ข้อมูลมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม (n_i) เท่ากับ (5,8,10), (5,10,15), (5,2,7,5,7,9) และ (5,10,15,5,10,15) สหสัมพันธ์ภายในชั้น (ρ) มีค่า 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.999 และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ 90% ทำการจำลองข้อมูลโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo Technique) ด้วยโปรแกรม SAS ทำการทดลองซ้ำ 2,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ที่ศึกษา จากการศึกษาพบว่า วิธี PB เป็นวิธีที่ดีที่สุดในสถานการณ์ที่ศึกษาเป็นส่วนใหญ่ เนื่องจากมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

คำสำคัญ : ช่วงความเชื่อมั่น, ความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่ม, ตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล

Abstract

The objective of this research is to study and compare three interval estimation methods for variance of random effect in unbalanced hierarchical model; the TG method (Ting *et al*., 1990), the PB method (Park *et al*., 2003) and the LL method (Li *et al*., 2005). The considered criteria are based on the confidence coefficients and the average length of the confidence intervals. The scopes of this research are consisted of the sample sizes (n_i) : (5,8,10), (5,10,15), (5,2,7,5,7,9) and (5,10,15,5,10,15) the intracluster correlation (ρ = 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.999) and the confidence level which is 90%. Data is simulated 2,000 times for each situation by Monte Carlo Technique using SAS software. The simulation results show that the PB method is the best method for most situations because it provides the smallest average length of confidence interval.

Keywords: confidence interval, variance of random effect, unbalanced hierarchical model

*Corresponding author. E-mail : noo_dangcom@hotmail.com

บทนำ

ตัวแบบเชิงลำดับขั้น (Hierarchical Model) เป็นตัวแบบที่ใช้ในการศึกษาทดลองเมื่อมีหลายปัจจัย กล่าวคือ มีการพิจารณาปัจจัยที่สนใจศึกษาตั้งแต่ 2 ปัจจัยขึ้นไป โดยทั่วไปตัวแบบเชิงลำดับขั้นอย่างง่ายจะมีปัจจัยที่ต้องการศึกษาเพียงสองปัจจัย โดยมีปัจจัยหนึ่งซ้อนอยู่ในแต่ละระดับของอีกปัจจัยหนึ่ง และเก็บข้อมูลซ้ำในจำนวนที่เท่ากัน ซึ่งจะเรียกตัวแบบในลักษณะนี้ว่า ตัวแบบเชิงลำดับขั้นสมดุล (Balanced Hierarchical Model) (Chomtee, 2013) ส่วนในกรณีที่เก็บข้อมูลซ้ำในจำนวนที่ไม่เท่ากัน จะเรียกว่า ตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล (Unbalanced Hierarchical Model) โดยในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สนใจศึกษาความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล ซึ่งสามารถเขียนตัวแบบได้ ดังนี้

$$\boldsymbol{y} = \mu\mathbf{1}_n + \boldsymbol{ZA} + \boldsymbol{E} \tag{1}$$

เมื่อ $\boldsymbol{y}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าสังเกตขนาด $n \times 1$ โดยที่ $\boldsymbol{y} \sim N(\mu\mathbf{1}_n, \sigma_A^2\boldsymbol{ZZ}' + \sigma_E^2\mathbf{I}_n)$

μ เป็นค่าเฉลี่ยทั้งหมด

$\mathbf{1}_n$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $n \times 1$ ซึ่งมีสมาชิกในแต่ละตำแหน่งเป็น 1

$\boldsymbol{Z} = \mathrm{diag}(\mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{1}_{n_2}, ..., \mathbf{1}_{n_g})$

$\boldsymbol{A}$ เป็นเวกเตอร์ของอิทธิพลสุ่มขนาด $g \times 1$ โดยที่ $\boldsymbol{A} \sim N(0, \sigma_A^2)$

$\boldsymbol{E}$ เป็นเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนสุ่มขนาด $n \times 1$ โดยที่ $\boldsymbol{E} \sim N(0, \sigma_E^2)$

$\mathbf{I}_n$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

g เป็นจำนวนกลุ่ม

n_i เป็นขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม โดยที่ $i = 1, 2, ..., g$

n เป็นผลรวมของขนาดตัวอย่าง โดยที่ $n = \sum_{i=1}^{g} n_i$

ส่วนประกอบความแปรปรวน (Variance Components) เป็นความแปรปรวนของปัจจัยต่าง ๆ ที่ศึกษาในตัวแบบ ซึ่งถือได้ว่าเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญของตัวแบบ โดยส่วนประกอบความแปรปรวนในงานวิจัยนี้มีอยู่ด้วยกัน 2 ส่วนประกอบ คือ ความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่ม (σ_A^2) และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (σ_E^2) ซึ่งในงานวิจัยนี้สนใจศึกษาการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่ม

การประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นการนำค่าสถิติที่คำนวณได้จากตัวอย่างสุ่มมาประมาณค่าพารามิเตอร์ การประมาณค่าพารามิเตอร์จำแนกเป็น 2 ประเภท คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) โดยการประมาณค่าแบบจุด เป็นการใช้ค่าสถิติเพียงค่าเดียวมาประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งอาจมีความคลาดเคลื่อนไปจากค่าพารามิเตอร์ ส่วนการประมาณค่าแบบช่วง เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ว่าจะอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง ซึ่งการประมาณค่าแบบช่วงมีโอกาสเกิดความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการประมาณค่าแบบจุด

มีงานวิจัยหลายงานที่ศึกษาเกี่ยวกับวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล โดยมีการกำหนดค่าสหสัมพันธ์ภายในชั้น (ρ) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มกับผลรวมของความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มและความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน งานวิจัยที่ผู้วิจัยสนใจศึกษาประกอบด้วย งานวิจัยของ Li *et al*. (2005) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล 3 วิธี จากการศึกษาพบว่า วิธี GE (Li *et al*., 2005) และวิธี ML (Burdick *et al*., 1984) ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อ ρ มีค่ามาก และวิธี LL (Li *et al*., 2005) ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกค่า ρ และงานวิจัยของ Van der Rijst *et al*. (2014) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล 6 วิธี จากการศึกษาพบว่า วิธี TH (Thomas *et al*., 1978) วิธี TG (Ting *et al*., 1990) วิธี ML (Burdick *et al*., 1992) และวิธี KR (Khuri, 1999) ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อ ρ มีค่ามาก ในขณะที่ ρ มีค่าน้อยพบว่า วิธี BE (Burdick *et al*., 1986) ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และพบว่าวิธี PB (Park *et al*., 2003) จะมีประสิทธิภาพดีในทุกค่า ρ เนื่องจากให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้นพบว่า วิธี LL และวิธี PB ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกค่า ρ นอกจากนี้ในงานวิจัยของ Van der Rijst *et al*. (2014) พบว่า วิธี TG มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นใกล้เคียงกับวิธี PB แม้ว่าวิธี TG จะให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อ ρ มีค่ามาก แต่วิธี TG มีขั้นตอนในการคำนวณที่ง่ายกว่าวิธี PB เนื่องจากขั้นตอนของวิธี PB อาศัยระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Methods) มาใช้แก้สมการไม่เชิงเส้น (Non-Linear Equation) ทำให้มีความยุ่งยากและซับซ้อน ซึ่งในบางสถานการณ์การเลือกใช้วิธี TG สามารถช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่ม ดังนั้น ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล ด้วยวิธีการประมาณค่า 3 วิธี คือ วิธี TG วิธี PB และวิธี LL โดยพิจารณาค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กำหนดจำนวนกลุ่มและขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม (n_i) ของตัวแบบที่มีลักษณะไม่สมดุล เท่ากับ (5,8,10), (5,10,15), (5,2,7,5,7,9) และ (5,10,15,5,10,15) โดยกำหนดสถานการณ์ในการศึกษากลุ่มตัวอย่าง ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 สถานการณ์ในการศึกษากลุ่มตัวอย่าง

รูปแบบ	จำนวนกลุ่ม (g)	ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม (n_i)
1	3	5 8 10
2	3	5 10 15
3	6	5 2 7 5 7 9
4	6	5 10 15 5 10 15

2. กำหนด $\rho = \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_E^2}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปจะกำหนดให้ $\sigma_A^2 + \sigma_E^2 = 1$ และ $\mu = 0$ โดยที่ ρ เท่ากับ 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.999 ตามลำดับ
3. กำหนดระดับนัยสำคัญ (α) เท่ากับ 0.1
4. สร้างข้อมูล $\boldsymbol{y}$ จากสมการที่ (1) เพื่อนำมาคำนวณช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่ม (σ_A^2) ด้วยวิธีการประมาณค่า 3 วิธี ดังนี้

4.1 วิธี TG มีขั้นตอนดังนี้

1) คำนวณหาค่า $S_M^2 = \dfrac{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}}{s}$ และ $S_E^2 = \dfrac{\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{y}}{r}$

เมื่อ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{1}_n(\boldsymbol{1}_n'\boldsymbol{1}_n)^{-1}\boldsymbol{1}_n'$, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{1}_n, \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}')$, $s = \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) - \operatorname{rank}(\boldsymbol{1}_n)$ และ $r = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{X})$

2) ช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 คือ $[R_5, R_{95}]$ เมื่อ

$$R_5 = S_M^2 - \frac{1}{h}S_E^2 - \sqrt{G_1^2 S_M^4 + \frac{1}{h^2}H_2^2 S_E^4 + \frac{1}{h}G_{12}S_M^2 S_E^2},\ R_{95} = S_M^2 - \frac{1}{h}S_E^2 + \sqrt{H_1^2 S_M^4 + \frac{1}{h^2}G_2^2 S_E^4 + \frac{1}{h}H_{12}S_M^2 S_E^2},$$

$$h = \frac{g}{(1/n_1 + 1/n_2 + ... + 1/n_g)},\ G_1 = 1 - \frac{1}{F_{1-\alpha,(s,\infty)}},\ G_2 = 1 - \frac{1}{F_{1-\alpha,(r,\infty)}},\ H_1 = \frac{1}{F_{\alpha,(s,\infty)}} - 1,\ H_2 = \frac{1}{F_{\alpha,(r,\infty)}} - 1,$$

$$G_{12} = \frac{(F_{1-\alpha,(s,r)} - 1)^2 - G_1^2 F_{1-\alpha,(s,r)}^2 - H_2^2}{F_{1-\alpha,(s,r)}} \quad \text{และ} \quad H_{12} = \frac{(1 - F_{\alpha,(s,r)})^2 - H_1^2 F_{\alpha,(s,r)}^2 - G_2^2}{F_{\alpha,(s,r)}}$$

โดยที่ F คือ ค่าวิกฤตจากการเปิดตาราง

4.2 วิธี PB มีขั้นตอนดังนี้

1) แก้สมการเพื่อหาค่าประมาณของ σ_A^2 (R) จากสมการต่อไปนี้

$$U = \sum_{l=1}^{m} \frac{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{B}}{rS_E^2/V + d_l R}$$

เมื่อ $U \sim \chi_s^2,\ V \sim \chi_r^2,\ s = \text{rank}(\boldsymbol{X}) - \text{rank}(\mathbf{1}_n),\ \ r = n - \text{rank}(\boldsymbol{X}),\ \ S_E^2$ เป็นค่าที่ได้จากวิธี TG

$\boldsymbol{B}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากวิธี TG

$\boldsymbol{E}_l$ เป็นตัวดำเนินการฉายเชิงตั้งฉากของปริภูมิลักษณะเฉพาะของ d_l

d_l เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นค่าบวกของ $\boldsymbol{W}$ โดยที่ $\boldsymbol{W}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากวิธี TG

m เป็นจำนวนของ d_l โดยที่ $l = 1, 2, \ldots, m$

2) คำนวณหาค่า R ทั้งหมด 10,000 รอบ และในกรณีที่ $R < 0$ ให้แทนค่า $R = 0$

3) เรียงลำดับค่า R ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2) โดยเรียงค่า R จากน้อยไปมาก

4) ช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 คือ $\left[R_5, R_{95}\right]$ เมื่อ R_5 และ R_{95} เป็นค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 5 และ 95 ของ R ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3) ตามลำดับ

4.3 วิธี LL มีขั้นตอนดังนี้

1) กำหนดให้ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 \end{bmatrix}$

เมื่อ $\boldsymbol{K}_1$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $1 \times g$ โดยที่ $\boldsymbol{K}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{1}_g'$

$\boldsymbol{K}_2$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(g-1) \times g$ โดยที่ $\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K}_2' = 0$ และ $\boldsymbol{K}_2 \boldsymbol{K}_2' = \mathbf{I}_{g\text{-}1}$

2) คำนวณหาค่า $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_2 \boldsymbol{D} \boldsymbol{K}_2' \boldsymbol{P}'$

เมื่อ $\boldsymbol{P}$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากขนาด $(g-1) \times (g-1)$

$\mathbf{D}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมขนาด $g \times g$ โดยที่ $\mathbf{D} = \text{diag}\left(\dfrac{1}{n_1}, \dfrac{1}{n_2}, \ldots, \dfrac{1}{n_g}\right)$

3) แก้สมการเพื่อหาค่าประมาณของ σ_A^2 (R) จากสมการต่อไปนี้

$$R = \frac{T - \boldsymbol{W}_1' \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{W}_1 \dfrac{SSE}{W_2}}{\boldsymbol{W}_1' \boldsymbol{W}_1}$$

เมื่อ $\boldsymbol{W}_1 \sim N(0, \mathrm{I}_{g-1}),\ W_2 \sim \chi_{n-g}^2,\ T = \sum_{i=1}^{g} \left(\bar{y}_{i.} - \sum_{i=1}^{g} \dfrac{\bar{y}_{i.}}{g} \right)^2,\ SSE = \sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$ และ $\bar{y}_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} \dfrac{y_{ij}}{n_i}$

4) คำนวณหาค่า R ทั้งหมด 10,000 รอบ และในกรณีที่ $R < 0$ ให้แทนค่า $R = 0$

5) เรียงลำดับค่า R ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 4) โดยเรียงค่า R จากน้อยไปมาก

6) ช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 คือ $\left[R_5, R_{95}\right]$ เมื่อ R_5 และ R_{95} เป็นค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 5 และ 95 ของ R ที่ได้จากขั้นตอนที่ 5) ตามลำดับ

5. ทำข้อที่ 4. ซ้ำ 2,000 ครั้ง

6. คำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(\hat{c})$ จากวิธีการประมาณค่าทั้งสามวิธี ในแต่ละสถานการณ์ ซึ่งสามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

$$\text{ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นคลุมค่าพารามิเตอร์ } \sigma_A^2}{2{,}000}$$

7. ตรวจสอบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นในข้อ 6. กับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดที่ระดับ 90% โดยวิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\hat{c} \geq c_0 - Z_{0.1}\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{n}}$$

โดยที่ $\hat{c}$ คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

c_0 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งเท่ากับ 90% และ

n คือ จำนวนครั้งของการทดลองซ้ำ ซึ่งเท่ากับ 2,000 ครั้ง

ในงานวิจัยนี้ วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 0.8914 ถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดที่ระดับ 90%

8. คำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 โดยคำนวณจากช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ซึ่งสามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

$$\text{ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น} = \frac{1}{2{,}000}\sum_{i=1}^{2{,}000}(R_{95} - R_5)$$

เมื่อ R_5 และ R_{95} เป็นค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 5 และ 95 ของ R ที่ได้จากแต่ละวิธีของการประมาณค่า σ_A^2 ในการทำซ้ำครั้งที่ i ตามลำดับ

9. เปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ในแต่ละวิธี โดยวิธีการประมาณที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด จะถือว่าเป็นวิธีการประมาณที่ดีที่สุดในสถานการณ์นั้น

ผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษา และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของอิทธิพลสุ่มในตัวแบบเชิงลำดับขั้นไม่สมดุล ด้วยวิธีการประมาณแบบช่วง 3 วิธี คือ วิธี TG วิธี PB และวิธี LL ทำการเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 โดยพิจารณาเปรียบเทียบจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่มีค่าไม่ต่ำกว่า 0.8914 และนำวิธีการที่มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดไปคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 โดยวิธีการที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด จะถือว่าวิธีการนั้นดีที่สุดในสถานการณ์นั้น ผลการศึกษาสามารถสรุปได้เป็น 2 ประเด็น ดังตารางที่ 2 และตารางที่ 3 ตามลำดับ

ประเด็นที่ 1 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

รูปแบบที่ 1 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 3 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,8,10 วิธีการประมาณค่าทั้งสามวิธีให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในทุกค่า ρ ดังภาพที่ 1ก.

รูปแบบที่ 2 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 3 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,10,15 วิธีการประมาณค่าทั้งสามวิธีโดยส่วนใหญ่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ยกเว้นเมื่อ ρ เท่ากับ 0.2 และ 0.3 วิธี TG และ วิธี LL ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ดังภาพที่ 1ข.

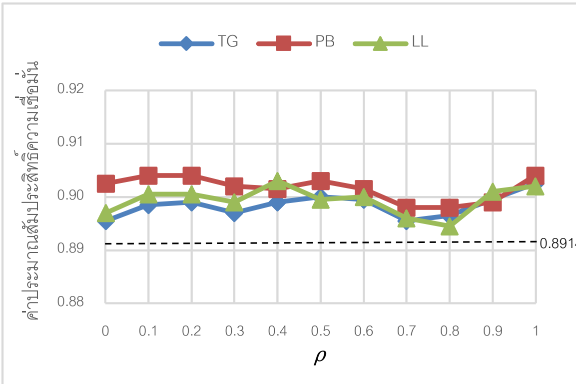
รูปแบบที่ 3 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 6 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,2,7,5,7,9 วิธีการประมาณค่าทั้งสามวิธี โดยส่วนใหญ่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ยกเว้นเมื่อ ρ เท่ากับ 0.001 และ 0.1 วิธี TG ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ดังภาพที่ 1ค.

รูปแบบที่ 4 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 6 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,10,15,5,10,15 วิธีการประมาณค่าทั้งสามวิธี โดยส่วนใหญ่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ยกเว้นเมื่อ ρ เท่ากับ 0.001 วิธี TG ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ดังภาพที่ 1ง.

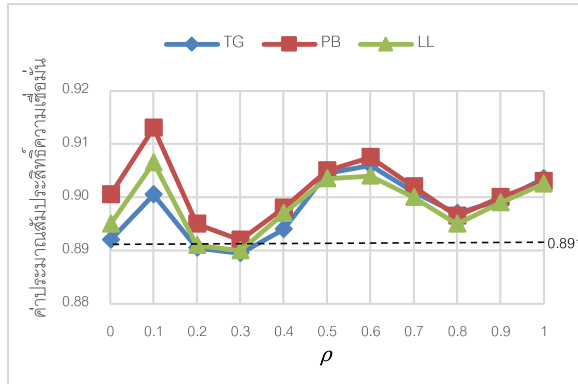
ตารางที่ 2 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2

รูปแบบ	วิธี	ρ										
		0.001	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.999
1	TG	**0.896**	**0.899**	**0.899**	**0.897**	**0.899**	**0.900**	**0.900**	**0.896**	**0.897**	**0.900**	**0.903**
	PB	**0.903**	**0.904**	**0.904**	**0.902**	**0.902**	**0.903**	**0.902**	**0.898**	**0.898**	**0.899**	**0.904**
	LL	**0.897**	**0.901**	**0.901**	**0.899**	**0.903**	**0.900**	**0.900**	**0.896**	**0.895**	**0.901**	**0.902**
2	TG	**0.892**	**0.901**	0.891	0.890	**0.894**	**0.905**	**0.906**	**0.901**	**0.897**	**0.900**	**0.904**
	PB	**0.901**	**0.913**	**0.895**	**0.892**	**0.898**	**0.905**	**0.908**	**0.902**	**0.897**	**0.900**	**0.903**
	LL	**0.895**	**0.907**	0.891	0.890	**0.897**	**0.904**	**0.904**	**0.900**	**0.895**	**0.899**	**0.903**
3	TG	0.880	0.891	**0.892**	**0.892**	**0.898**	**0.903**	**0.904**	**0.906**	**0.904**	**0.904**	**0.907**
	PB	**0.900**	**0.895**	**0.895**	**0.902**	**0.905**	**0.909**	**0.909**	**0.911**	**0.909**	**0.906**	**0.907**
	LL	**0.937**	**0.922**	**0.924**	**0.928**	**0.929**	**0.928**	**0.929**	**0.931**	**0.933**	**0.927**	**0.909**
4	TG	0.887	**0.896**	**0.895**	**0.901**	**0.901**	**0.905**	**0.908**	**0.904**	**0.906**	**0.906**	**0.908**
	PB	**0.913**	**0.906**	**0.906**	**0.906**	**0.906**	**0.910**	**0.910**	**0.912**	**0.913**	**0.912**	**0.911**
	LL	**0.928**	**0.926**	**0.922**	**0.916**	**0.911**	**0.911**	**0.911**	**0.907**	**0.908**	**0.904**	**0.906**

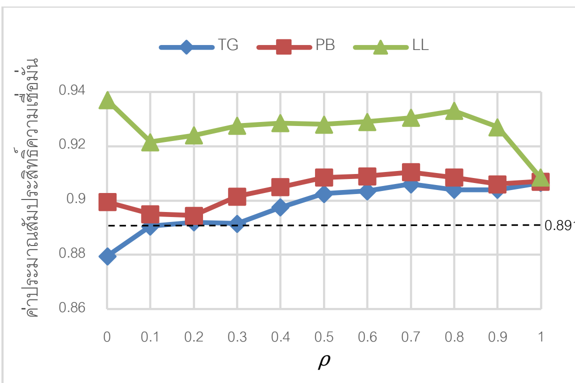
หมายเหตุ ตัวหนา คือ กรณีที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ที่คำนวณได้มีค่าไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งเท่ากับ 0.8914



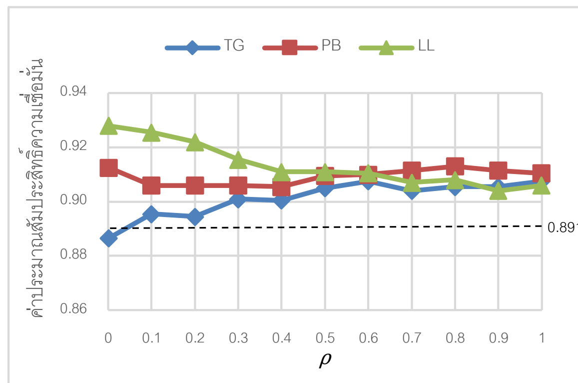
ก. รูปแบบที่ 1 (5,8,10)



ข. รูปแบบที่ 2 (5,10,15)



ค. รูปแบบที่ 3 (5,2,7,5,7,9)



ง. รูปแบบที่ 4 (5,10,15,5,10,15)

ภาพที่ 1 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความเชื่อมั่น 90 % สำหรับ σ_A^2

ประเด็นที่ 2 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2

รูปแบบที่ 1 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 3 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,8,10 วิธี PB ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด ในทุกค่า ρ รองลงมาคือ วิธี TG และวิธี LL ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 มากที่สุด ดังภาพที่ 2ก.

รูปแบบที่ 2 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 3 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,10,15 วิธี TG ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด ในทุกค่า ρ รองลงมาคือ วิธี PB และวิธี LL ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 มากที่สุด ยกเว้นเมื่อ ρ เท่ากับ 0.2 และ 0.3 วิธี TG และวิธี LL ไม่มีการคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 เนื่องจากมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ดังภาพที่ 2ข.

รูปแบบที่ 3 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 6 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,2,7,5,7,9 วิธี PB ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด เมื่อ $\rho > 0.3$ รองลงมาคือ วิธี TG และวิธี LL ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 มากที่สุด ยกเว้นเมื่อ ρ เท่ากับ 0.001 และ 0.1 วิธี TG ไม่มีการคำนวณ

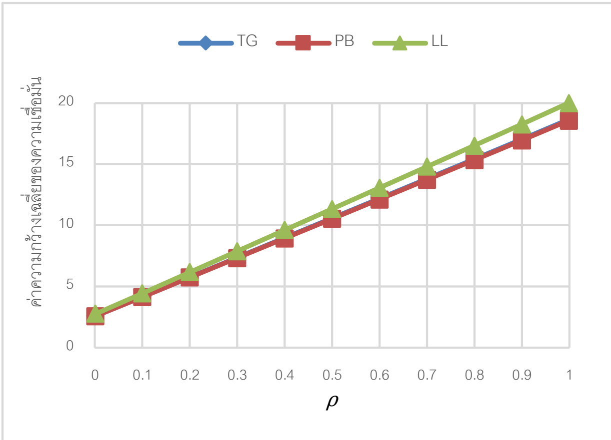
ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 เนื่องจากมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ดังภาพที่ 2ค.

รูปแบบที่ 4 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 6 และมีขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 5,10,15,5,10,15 วิธี PB ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด ในทุกค่า ρ โดยส่วนใหญ่วิธี TG จะให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำกว่าวิธี LL ยกเว้นเมื่อ ρ เท่ากับ 0.3, 0.7 และ 0.8 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยไม่ต่างกัน และเมื่อ ρ เท่ากับ 0.001 วิธี TG ไม่มีการคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 เนื่องจากมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ดังภาพที่ 2ง.

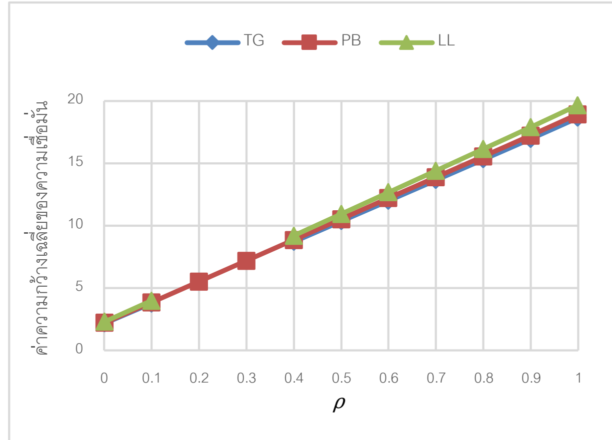
ตารางที่ 3 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2

รูปแบบ	วิธี	ρ										
		0.001	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.999
1	TG	2.58	4.15	5.76	7.37	8.98	10.59	12.19	13.81	15.42	17.04	18.67
	PB	2.56	4.13	5.72	7.32	8.92	10.51	12.11	13.71	15.31	16.93	18.54
	LL	2.75	4.44	6.16	7.88	9.61	11.33	13.06	14.78	16.51	18.25	19.99
2	TG	2.18	3.78	-	-	8.72	10.37	12.02	13.67	15.33	16.99	18.67
	PB	2.21	3.84	5.52	7.19	8.87	10.54	12.21	13.89	15.57	17.25	18.95
	LL	2.30	4.00	-	-	9.21	10.94	12.68	14.42	16.16	17.91	19.67
3	TG	-	-	1.42	1.75	2.07	2.39	2.70	3.01	3.31	3.62	3.92
	PB	0.66	1.02	1.34	1.72	2.04	2.35	2.66	2.97	3.28	3.58	3.88
	LL	0.66	0.98	1.34	1.70	2.05	2.41	2.70	3.05	3.40	3.72	3.92
4	TG	-	0.79	1.16	1.52	1.87	2.21	2.56	2.90	3.24	3.59	3.92
	PB	0.40	0.78	1.15	1.50	1.85	2.20	2.54	2.89	3.23	3.57	3.91
	LL	0.40	0.81	1.15	1.52	1.88	2.23	2.57	2.90	3.24	3.57	3.91

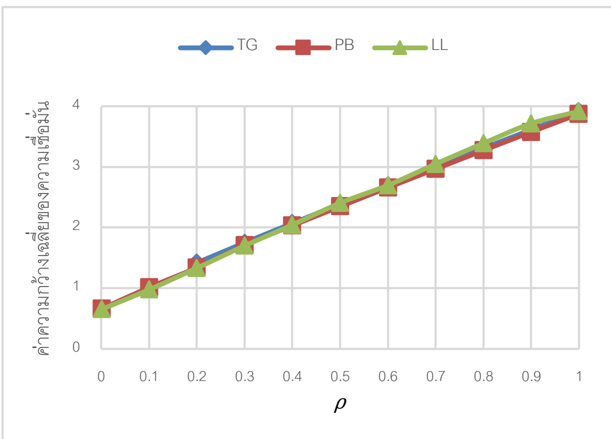
หมายเหตุ - หมายถึง ไม่มีการคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 เนื่องจากมีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด



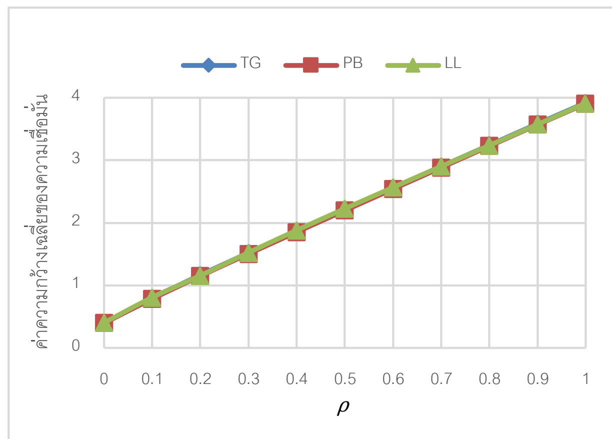
ก. รูปแบบที่ 1 (5,8,10)



ข. รูปแบบที่ 2 (5,10,15)



ค. รูปแบบที่ 3 (5,2,7,5,7,9)



ง. รูปแบบที่ 4 (5,10,15,5,10,15)

ภาพที่ 2 ค่าความกว้างเฉลี่ยของความเชื่อมั่น 90 % สำหรับ σ_A^2

วิจารณ์ผลการวิจัย

จากการจำลองข้อมูลทั้งหมด 44 สถานการณ์ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีที่นำเสนอ คือ วิธี TG วิธี PB และวิธี LL พบว่า เมื่อ ρ มีค่ามาก วิธี TG ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และในรูปแบบที่ 2 วิธี TG โดยส่วนใหญ่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกค่า ρ และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด เมื่อเทียบกับวิธีอื่น ๆ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Park *et al*. (2003) สำหรับวิธี PB โดยส่วนใหญ่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุดในทุกรูปแบบ และทุกค่า ρ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Van der Rijst *et al*. (2014)

สรุปผลการวิจัย

จากการพิจารณาเกณฑ์ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 พบว่า วิธี PB เป็นวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกรูปแบบ และทุกค่า ρ ส่วนวิธี TG และวิธี LL โดยส่วนใหญ่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ยกเว้นเมื่อ ρ มีค่าน้อย จะให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และเมื่อพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 พบว่า วิธี PB โดยส่วนใหญ่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 ต่ำที่สุด และเมื่อ ρ มีค่ามาก พบว่า ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 มีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่จำนวนกลุ่มมากขึ้นค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2 มีค่าลดลง ซึ่งจะเห็นได้ว่าจำนวนกลุ่มและ ρ มีผลต่อค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ σ_A^2

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยการสนับสนุนจากโครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย) และภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์สำหรับการเอื้อเฟื้อสถานที่และทรัพยากรต่าง ๆ ในการวิเคราะห์ข้อมูลจนสำเร็จ

เอกสารอ้างอิง

Burdick, R.K., & Graybill, F.A. (1984). Confidence Intervals on Linear Combinations of Variance Components in the Unbalanced One-Way Classification. *Technometrics*, *26*(2), 131–136.

Burdick, R.K., & Eickman, J. (1986). Confidence Intervals on the Among Group Variance Component in the Unbalanced One-Fold Nested Design. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *26*, 205-219.

Burdick, R.K., & Graybill, F.A. (1992). *Confidence Intervals on Variance Components.* Florida: CRC Press.

Chomtee, B. (2013). Nested Designs. *Statistical Experimental Design: Theory and Analysis by Using SAS Software*. (pp. 199). Bangkok: Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University. (in Thai)

Khuri, A.I. (1999). *Further Insights Concerning the Method of Unweighted Means.* (pp. 1-28). Florida: Department of Statistics, University of Florida.

Li, X., & Li, G. (2005). Confidence Intervals on Sum of Variance Components with Unbalanced Designs. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, *34*, 833–845.

Park, D.J., & Burdick, R.K. (2003). Performance of Confidence Intervals in Regression Models with Unbalanced One-Fold Nested Error Structures. *Communications in Statistics - Simulation and Computation, 32*(3), 717–732.

Thomas, J.D., & Hultiquist, R.A. (1978). Interval Estimation for the Unbalanced Case of the One-Way Random Effects Model. *The Annals of Statistics, 6*(3), 582–587.

Ting, N., Burdick, R.K., Graybill, F.A., Jeyaratnam, S., & Lu, T.F.C. (1990). Confidence Intervals on Linear Combinations of Variance Components. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *35*,135–143.

Van der Rijst, M., Van der Merwe, A.J., & Hugo, J. (2014). *Performance of Confidence Intervals on the Among Group Variance in the Unbalanced One-Factor Random Effects Model*. Retrieved January 20, 2019, from https://www.ufs.ac.za/docs/librariesprovider22/mathematical-statistics-and-actuarial-science-documents/technical-reports-documents/teg411-1869-eng.pdf?sfvrsn=1833f921_0