# ตัวแทนของจำนวนธรรมชาติในรูปฟังก์ชันพื้น

# The Representation of Natural Numbers in Terms of Floor Function

วิภาวี ตั้งใจ* และ ราชันย์ พลสวัสดิ์

Wipawee Tangjai* and Rachan Ponsawad

*ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม*

*Department of Mathematics, Faculty of Science, Mahasarakham University*

Received : 27 January 2019

Revised : 1 April 2019

Accepted : 17 July 2019

## บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาตัวแทนและหาผลเฉลยทั้งหมดของจำนวนธรรมชาติ $m, a$ ในรูป $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ เมื่อ $4 \leq k_1 \leq 30$ และ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ เมื่อ $2 \leq k_2 \leq 7$ และแสดงว่า $(m,a) \in \{(1,8),(1,10)\}$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ สำหรับทุก $k_1 \geq 6$ และ $(m,a) \in \{(1,1),(1,2)\}$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ สำหรับทุก $k_2 \geq 2$

**คำสำคัญ** : ตัวแทนของจำนวนธรรมชาติในรูปฟังก์ชันพื้น

## Abstract

In this article, we study the representation and find all of the solutions of natural numbers $m$ and $a$ that can be represented in the form $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$, where $4 \leq k_1 \leq 30$, and $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$, where $2 \leq k_2 \leq 7$. We also show that $(m,a) \in \{(1,8),(1,10)\}$ satisfies $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$, for all $k_1 \geq 6$, and $(m,a) \in \{(1,1),(1,2)\}$ satisfies $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$, for all $k_2 \geq 2$.

**Keywords** : floor representation of the natural numbers

*Corresponding author. E-mail : wipawee.t@msu.ac.th

## บทนำ

การศึกษาตัวแทนของจำนวนธรรมชาติมีความเป็นมายาวนานและมีการศึกษาในหลายรูปแบบ ในปี ค.ศ. 1981 Gilbert (Gilbert, 1981) ศึกษาตัวแทนเรดิกซ์ (radix representation) ซึ่งเป็นตัวแทนของจำนวนธรรมชาติที่นิยามขึ้นในทำนองเดียวกับตัวแทนที่เกิดจากเลขฐานสอง นอกจากนี้ผลงานที่เกี่ยวข้องกับตัวแทนเรดิกซ์อื่น ๆ พบได้ในผลงานของ Matula (Matula, 1982) และ Reznick (Reznick, 1989)

ในปี ค.ศ. 2013 Farhi (Farhi, 2013) ได้ศึกษาผลลัพธ์เกี่ยวกับตัวแทนของจำนวนธรรมชาติในรูปของ ฟังก์ชันพื้น (floor function) $\lfloor x \rfloor$ ซึ่งคือจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ $x$ เมื่อ $x$ เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ในรูปผลรวมของจำนวนสามจำนวนของลำดับ $\left\lfloor \frac{n^2}{a} \right\rfloor$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $a$ เป็นจำนวนเต็มบวก และได้ว่าทุกจำนวนธรรมชาติเป็นผลรวมของจำนวนสามจำนวนของลำดับ $\left\lfloor \frac{n^2}{8} \right\rfloor$ และ $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ นอกจากนี้ยังแสดงว่าทุกจำนวนคู่ที่ไม่เป็นลบเป็นผลรวมของจำนวนสามจำนวนของลำดับ $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ และ ในปี ค.ศ. 2014 Soufiane และคณะ (Soufiane *et al.*, 2014) ได้พิสูจน์ว่าทุกจำนวนธรรมชาติ $\mathrm{N} \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 24)$ สามารถเขียนในรูปผลรวมของจำนวนสามจำนวนของลำดับ $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และข้อพิสูจน์ยังคงเป็นจริงแม้ว่า $\mathrm{N} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 24)$

ในการทำบทความครั้งนี้ผู้จัดทำบทความได้ศึกษาตัวแทนของจำนวนธรรมชาติ $m, a$ ในรูปแบบ

$$ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor \quad (1)$$

และ

$$ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor \quad (2)$$

โดยผู้จัดทำได้ให้ผลเฉลยทั้งหมดของ (1) เมื่อ $4 \le k_1 \le 30$ และให้ผลเฉลยทั้งหมดของ (2) เมื่อ $2 \le k_2 \le 7$ นอกจากนี้ยังแสดงว่า $(m, a) \in \{(1,8), (1,10)\}$ เป็นผลเฉลยของ (1) สำหรับทุก $k_1 \ge 6$ และ $(m, a) \in \{(1,1), (1,2)\}$ เป็นผลเฉลยของ (2) สำหรับทุก $k_2 \ge 2$

## วิธีดำเนินการวิจัย

บทตั้ง 1 แสดงว่า เมื่อ $4 \le k_1 \le 30$ และ $2 \le k_2 \le 7$ ถ้า $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ หรือ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ แล้วจะได้ว่า $m = 1$ เท่านั้น

**บทตั้ง 1** ให้ $m, a$ เป็นจำนวนธรรมชาติที่สอดคล้องกับ

*i)* $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ เมื่อ $4 \le k_1 \le 30$

หรือ

*ii)* $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ เมื่อ $2 \le k_2 \le 7$

แล้วจะได้ว่า $m = 1$

*พิสูจน์* สำหรับ $4 \le k_1 \le 30$ จะได้ว่า $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor \le \sum_{i=1}^{30} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor \le \sum_{i=1}^{30} \frac{a}{2i} \approx 1.997a$
ดังนั้น $1 \le m \le 1.997$ นั่นคือ $m = 1$ ในทำนองเดียวกันสำหรับ $2 \le k_2 \le 7$ จะได้ว่า
$ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor \le \sum_{i=1}^{7} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor \le \sum_{i=1}^{7} \frac{a}{2i-1} \approx 1.955a$ ดังนั้น $1 \le m \le 1.955$ นั่นคือ $m = 1$ □

สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k$ ใด ๆ ให้ $l_k = lcm(2,4,6,\dots,2k)$ และ $l'_k = lcm(3,5,7,\dots,2k-1)$ สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ $a$ จะได้ว่า $a \equiv r \ (mod\ l_k)$ สำหรับบาง $0 \le r \le l_k - 1$ และ $a \equiv r' \ (mod\ l'_k)$ สำหรับบาง $0 \le r' \le l'_k - 1$

จากบทตั้ง 1 สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k_1 \in \{4,\dots,30\}$ จะได้ว่า $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ มีผลเฉลยเมื่อ $m = 1$ เท่านั้น ในทฤษฎีบท 2 ผู้จัดทำให้ผลเฉลยทั้งหมดของ $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ เมื่อ $4 \le k_1 \le 30$

**ทฤษฎีบท** 2 ให้ $m, a, k_1$ เป็นจำนวนธรรมชาติที่ $4 \le k_1 \le 30$ จะได้ว่า $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $m = 1$ และ

*i)* $a \in \{8,12,16,18,20,25,26,28,30,33,34,37,38,41,43,45,46,51,53,55,59,63,71\}$ เมื่อ $k_1 = 4$

*ii)* $a \in \{8,10,13,14,17,19,23\}$ เมื่อ $k_1 = 5$

*iii)* $a \in \{8,10,15\}$ เมื่อ $k_1 = 6$

*iv)* $a \in \{8,10\}$ เมื่อ $7 \le k_1 \le 30$

*พิสูจน์* จากบทตั้ง 1 จะได้ว่า $m = 1$ ให้ $r \equiv a \ (mod\ l_k)$ เมื่อ $0 \le r \le l_k - 1$

เนื่องจาก $2i \mid l_k$ ทุก $i \le k$ จะได้ $\frac{a-r}{2i}$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $ma = a = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a-r}{2i} + \frac{r}{2i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{a-r}{2i} + \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{r}{2i} \right\rfloor$ (3)

จาก (3) จะได้ว่าผลเฉลยของ (1) ทั้งหมดสามารถหาได้จากการพิจารณา $0 \le r \le l_k - 1$

จากการคำนวณโดยโปรแกรม sage แทนค่า $0 \le r \le l_{k_1} - 1$ ใน (3) จะได้ผลเฉลยตารางที่ 1 □

| $k_1$ | $a$ |
|---|---|
| 4 | 8,12,16,18,20,25,26,28,30,33,34,37,38,41,43,45,46,51,53,55,59,63,71 |
| 5 | 8,10,13,14,17,19,23 |
| 6 | 8,10,15 |
| $7 - 30$ | 8,10 |

ตารางที่ 1 ผลเฉลยทั้งหมดของ $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ เมื่อ $4 \le k_1 \le 30$

**ทฤษฎีบท** 3 ให้ $m, a$ เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $(m,a) \in \{(1,8),(1,10)\}$ เป็นคำตอบของ

$$ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor \text{ สำหรับทุก } k_1 \ge 6$$

*พิสูจน์* ให้ $(m,a) \in \{(1,8),(1,10)\}$ โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(m,a)$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{i=1}^{6} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$

เนื่องจาก $\left\lfloor \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{j}} \right\rfloor = 0$ สำหรับทุก $j \geq 6$ ดังนั้น $\sum_{\mathrm{i}=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}} \right\rfloor = \sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}} \right\rfloor = ma$ สำหรับทุก $k_1 \geq 6$ □

ทฤษฎีบท 4 ให้ผลเฉลยทั้งหมดของ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ เมื่อ $2 \leq k_2 \leq 7$

**ทฤษฎีบท** 4 ให้ $m, a, k_2$ เป็นจำนวนธรรมชาติที่ $2 \leq k_2 \leq 7$ จะได้ว่า $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $m = 1$ และ $a \in \{1,2\}$

*พิสูจน์* จากบทตั้ง 1 จะได้ว่า $m = 1$ ให้ $r \equiv a \ (mod\ l'_k)$ เมื่อ $0 \leq r \leq l'_k - 1$

เนื่องจาก $2i - 1 \mid l'_k$ ทุก $i \leq k$ จะได้ $\frac{a-r}{2i-1}$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $ma = a = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a-r}{2i-1} + \frac{r}{2i-1} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k_2} \frac{a-r}{2i-1} + \sum_{i=2}^{k_2} \left\lfloor \frac{r}{2i-1} \right\rfloor$ (4)

จาก (4) จะได้ว่าผลเฉลยของ (2) ทั้งหมดสามารถหาได้จากการพิจารณา $0 \leq r \leq l'_k - 1$

จากการคำนวณโดยโปรแกรม sage แทนค่า $0 \leq r \leq l'_k - 1$ ใน (4) จะได้ว่าผลเฉลยของ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$

คือ $(m, a) \in \{(1,1), (1,2)\}$ เมื่อ $2 \leq k_2 \leq 7$ □

**ทฤษฎีบท** 5 ให้ $m, a$ เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $(m, a) \in \{(1,1), (1,2)\}$ เป็นคำตอบของ

$$ma = \sum_{\mathrm{i}=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}-1} \right\rfloor \text{ สำหรับทุก } k_2 \geq 2$$

*พิสูจน์* ให้ $(m, a) \in \{(1,1), (1,2)\}$ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $(m, a)$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}-1} \right\rfloor$

เนื่องจาก $\left\lfloor \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{j}-1} \right\rfloor = 0$ เมื่อ $j \geq 2$ ดังนั้น $\sum_{\mathrm{i}=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}-1} \right\rfloor = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}-1} \right\rfloor = ma$ สำหรับทุก $k_2 \geq 2$ □

**ผลการวิจัย**

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ผลเฉลยที่เป็นจำนวนธรรมชาติทั้งหมดของ $m, a$ เมื่อ $4 \leq k_1 \leq 30$ ของสมการ $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ และทฤษฎีบทที่ 4 ได้ผลเฉลยที่เป็นจำนวนธรรมชาติทั้งหมดของ $m, a$ เมื่อ $2 \leq k_2 \leq 7$ ของสมการ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ ในทฤษฎีบทที่ 3 และ 5 ได้แสดงว่า $(m, a) \in \{(1,8), (1,10)\}$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{\mathrm{i}=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}} \right\rfloor$ สำหรับทุก $k_1 \geq 6$ และ $(m, a) \in \{(1,1), (1,2)\}$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{\mathrm{i}=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2\mathrm{i}-1} \right\rfloor$ สำหรับทุก $k_2 \geq 2$ ตามลำดับ

**วิจารณ์ผลการวิจัย**

ในบทความนี้สมการ (1) และ (2) มีผลเฉลยเมื่อ $m = 1$ เท่านั้น ซึ่งเป็นผลมาจากบทตั้ง 1 อย่างไรก็ตามถ้าค่าของ $k_1$ และ $k_2$ มากกว่า 30 และ 7 ตามลำดับจะไม่สามารถใช้บทตั้ง 1 ในการสรุปว่า $m = 1$ ได้ ดังนั้นผลเฉลยของทฤษฎีบท 2 และ ทฤษฎีบท 4 อาจมีผลเฉลยเมื่อ $m > 1$

**สรุปผลการวิจัย**

ในบทความนี้ผู้จัดทำให้ผลเฉลยทั้งหมดของ $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ เมื่อ $4 \leq k_1 \leq 30$ และให้ผลเฉลยทั้งหมดของ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ เมื่อ $2 \leq k_2 \leq 7$ นอกจากนี้ยังแสดงว่า $(m, a) \in \{(1,8), (1,10)\}$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{i=1}^{k_1} \left\lfloor \frac{a}{2i} \right\rfloor$ สำหรับทุก $k_1 \geq 6$ และ $(m, a) \in \{(1,1), (1,2)\}$ เป็นผลเฉลยของ $ma = \sum_{i=1}^{k_2} \left\lfloor \frac{a}{2i-1} \right\rfloor$ สำหรับทุก $k_2 \geq 2$

**กิตติกรรมประกาศ**

ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ประพันธ์พงศ์ พงศ์ศรีเอี่ยม ที่ให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะในการจัดทำบทความนี้

**เอกสารอ้างอิง**

Farhi, B. (2013) On the Representation of the Natural Numbers as the Sum of Three Terms of the Sequence $\left\lfloor \frac{n^2}{a} \right\rfloor$. *Journal of Integer Sequences*, *16*, 13.6.3.

Farhi, B. (2014) An Elementary Proof that any Natural Number can be Written as the Sum of Three Terms of the Sequence $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$. *Journal of Integer Sequences*, *14*,7.6.

Gilbert, W, J (1981) Radix Representation of Quadratic Fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 83*(1), 264-274.

Matula, D, W. (1982) Basic Digit Sets for Radix Representation. *Journal of ACM, 29*(4), 1131-1143.

Reznick, B. (1989) Digital representations using the greatest integer functions. *Transactions of the American Mathematical Society, 312*(1), 355-375.

Soufiane, M, Abdelmalek, A, and Ziane, M. (2014) On a conjecture of Farhi. *Journal of Integer Sequences*, *17*, 14.1.8.