การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไป

Parameter Estimation for Generalized Poisson Regression Model

อุมาพร วชิรโรจน์ประภา[1], บัณฑิตา พลับอินทร์[2*], มานะชัย รอดชื่น[2] และ พุฒิพงษ์ พุกกะมาน[2]

Umaporn Wachirarotepraρa[1], Bandhita Plubin[2], Manachai Rodchuen[2] and Putipong Bookkamana[2]

[1] *บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*

[2] *ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*

[1] *Graduate School, Chiang Mai University*

[2] *Department of Statistics, Faculty of Science, Chiang Mai University*

Received : 25 April 2019

Revised : 25 June 2019

Accepted : 6 August 2019

บทคัดย่อ

การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปในกรณีมีตัวแปรอธิบายที่มีการแจกแจงปรกติ 1 ตัวแปร ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1 โดยจะประมาณค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย (β_0, β_1) และพารามิเตอร์การกระจาย (φ) ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 4 วิธี ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีโมเมนต์ และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ ใช้วิธีการจำลองข้อมูลด้วยวิธีมอนติคาร์โลกระทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา คือ 20, 50, 100 และ 300 กำหนดพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย β_0 เท่ากับ 0 และ β_1 เท่ากับ -0.5, -0.3, 0.3 และ 0.5 พารามิเตอร์การกระจาย (φ) คือ -0.5, -0.3, 0, 0.3 และ 0.5 เกณฑ์ในการพิจารณาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ คือ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวม ผลการจำลองพบว่า ประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ผลไม่แตกต่างกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เช่นเดียวกับวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ที่ให้ผลไม่แตกต่างกับวิธีโมเมนต์ โดยกรณีที่ข้อมูลเกิดการกระจายต่ำกว่าเกณฑ์วิธีโมเมนต์เป็นวิธีที่เหมาะสมกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด กรณีที่ข้อมูลเกิดการกระจายสูงกว่าเกณฑ์วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีที่เหมาะสมกว่าวิธีโมเมนต์ และกรณีที่ข้อมูลเกิดการกระจายเท่ากับเกณฑ์วิธีโมเมนต์หรือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีที่เหมาะสม

คำสำคัญ : ตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไป, วิธีแจ็กไนฟ์, การกระจายต่ำกว่าเกณฑ์, การกระจายเท่ากับเกณฑ์, การกระจายสูงกว่าเกณฑ์

***Corresponding author. E-mail** : bandhita2459@gmail.th

Abstract

The purpose of this study was to compare parameter estimation methods for generalized poisson regression model which the independent variable was normal distributed with mean equal to 0 and standard deviation equal to 1. The coefficients of regression (β_0, β_1) and dispersion parameter (φ) were estimated by four estimation methods: maximum likelihood estimation (MLE), jackknife maximum likelihood estimation (JMLE), moment estimation (ME) and jackknife moment estimation (JME). The data was generated by using Monte-Carlo simulation method with the repetition of 1,000 times, sample sizes are equal to 20, 50, 100 and 300: β_0 is equal to 0, β_1 are equal to -0.5, -0.3, 0.3 and 0.5 and the dispersion parameters (φ) are equal to -0.5, -0.3, 0, 0.3 and 0.5. The sum of mean squares error and the sum of bias were used as the performance criteria. The simulation study indicated that the efficiency of the maximum likelihood estimation was not different from the jackknife maximum likelihood estimation. As well as the jackknife moment estimation was not different from the moment estimation. Therefore, the moment estimation was more appropriate than the maximum likelihood estimation for the underdispersion situation while the maximum likelihood estimation was more appropriate than the moment estimation for the overdispersion situation. The moment estimation and the maximum likelihood estimation were appropriate for equidispersion situation.

Keywords : generalized poisson regression model, jackknife method, underdispersion, equidispersion, overdispersion

บทนำ

ตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไป (Generalized poisson regression model) เป็นตัวแบบหนึ่งที่ใช้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตอบสนอง (Response variable) ที่เป็นจำนวนนับกับตัวแปรอธิบาย (Explanatory variables) เช่นเดียวกับตัวแบบการถดถอยปัวซง (Poisson regression model) ตัวแบบการถดถอยทวินามเชิงลบ (Negative binomial regression model) เป็นต้น อย่างไรก็ตามในการประยุกต์ตัวแบบใด ๆ กับข้อมูลจำเป็นต้องคำนึงถึงข้อสมมติเบื้องต้นของแต่ละตัวแบบ ซึ่งเมื่อพิจารณาข้อสมมติเบื้องต้นของตัวแบบจะเห็นว่าตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปมีความยืดหยุ่นในการนำไปประยุกต์กับข้อมูล เนื่องจากไม่จำกัดว่าข้อมูลจะต้องเกิดการกระจายเท่ากับเกณฑ์ (Equidispersion) เช่นเดียวกับตัวแบบการถดถอยปัวซง อีกทั้งสามารถประยุกต์กับข้อมูลที่การกระจายต่ำกว่าเกณฑ์ (Underdispersion) และกรณีการกระจายสูงกว่าเกณฑ์ (Overdispersion) ในขณะที่ตัวแบบการถดถอยทวินามเชิงลบเหมาะสมที่จะประยุกต์กับข้อมูลที่เกิดปัญหาการกระจายสูงกว่าเกณฑ์ (Zamani and Ismail, 2012)

ตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปเป็นส่วนหนึ่งในตัวแบบเชิงเส้นนัยทั่วไป (Generalized linear models: GLMs) โดยไม่จำกัดว่าตัวแปรตอบสนองต้องมีการแจกแจงปรกติเท่านั้น ส่วนประกอบของตัวแบบเชิงเส้นนัยทั่วไปมี 3 ส่วน คือ 1) ส่วนประกอบเชิงสุ่ม (Random component) เป็นส่วนที่เกี่ยวกับคุณลักษณะการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรตอบสนองที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบใดแบบหนึ่งในวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential family) 2) ส่วนประกอบเชิงระบบ (Systematic component) ใช้แสดงฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรอธิบาย และ 3) ฟังก์ชันเชื่อมโยง (Link function) ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบเชิงสุ่มและส่วนประกอบเชิงระบบ โดยฟังก์ชันเชื่อมโยงนั้นต้องสามารถหา

อนุพันธ์ได้ (Differentiable) และเป็นฟังก์ชันทางเดียว (Monotonic) (McCullagh and Nelder, 1952) เมื่อพิจารณาส่วนประกอบ 3 ส่วนข้างต้นของตัวแบบ ส่วนประกอบเชิงสุ่มของตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปจะมีการแจกแจงปัวซงนัยทั่วไป (Generalized poisson distribution) และมีฟังก์ชันล็อกเป็นฟังก์ชันเชื่อมโยง ในการศึกษาครั้งนี้ศึกษากรณีที่มีตัวแปรอธิบาย 1 ตัวแปร สามารถเขียนฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแบบถดถอยปัวซงนัยทั่วไปได้ ดังนี้ (Zamani and Ismail, 2012)

$$P(Y_i = y_i) = \lambda_i(\lambda_i + \varphi y_i)^{y_i - 1}(1+\varphi)^{-y_i}\frac{\exp(-(1+\varphi)^{-1}(\lambda_i + \varphi y_i))}{y_i!}; y_i = 0,1,2,... \quad (1)$$

โดยที่ $E(Y_i) = \lambda_i,\ V(Y_i) = (1+\varphi)^2\lambda_i,\ \lambda_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i)$ และ

Y_i แทน จำนวนเหตุการณ์ที่สนใจในขอบเขตใดขอบเขตหนึ่งจากตัวอย่างสุ่มที่ i โดยที่ i = 1, 2, …, n

X_i แทน ค่าตัวแปรอธิบายจากตัวอย่างสุ่มที่ i

λ_i แทน ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม Y_i

β_0, β_1 แทน พารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย

φ แทน พารามิเตอร์การกระจาย

พารามิเตอร์การกระจาย (φ) ถูกนำมาใช้เป็นเกณฑ์ในการพิจารณาข้อมูลที่มีลักษณะการกระจายแบบต่าง ๆ โดยที่ถ้า φ เท่ากับ 0 แสดงว่า ข้อมูลเกิดการกระจายเท่ากับเกณฑ์ นั่นคือ ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของตัวแปรตอบสนองมีค่าเท่ากันจะทำให้ตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปกลายเป็นตัวแบบการถดถอยปัวซง แต่ถ้า φ มากกว่า 0 แสดงว่า ข้อมูลเกิดการกระจายสูงกว่าเกณฑ์ นั่นคือ ค่าความแปรปรวนของตัวแปรตอบสนองจะมีค่ามากกว่าค่าเฉลี่ย และถ้า φ น้อยกว่า 0 แสดงว่า ข้อมูลเกิดการกระจายต่ำกว่าเกณฑ์ นั่นคือ ค่าความแปรปรวนของตัวแปรตอบสนองจะมีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ย Islam et al. (2013) ได้ประยุกต์ตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปกับข้อมูลจำนวนเด็กอายุต่ำกว่า 5 ปีที่มีภาวะทุพโภชนาการในประเทศบังคลาเทศ ซึ่งเป็นข้อมูลที่เกิดการกระจายต่ำกว่าเกณฑ์ โดยได้ค่าประมาณพารามิเตอร์การกระจายมีค่าเท่ากับ -0.30266 Wagh and Kamalja (2017) ได้ประยุกต์ตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปกับข้อมูลค่าสินไหมทดแทนของการประกันภัยในประเทศสิงคโปร์ ซึ่งเป็นข้อมูลที่เกิดการกระจายสูงกว่าเกณฑ์ โดยได้ค่าประมาณพารามิเตอร์การกระจายมีค่าเท่ากับ 0.3783

อย่างไรก็ตามในการประยุกต์ตัวแบบกับข้อมูลนอกจากจะเลือกชนิดของตัวแบบให้เหมาะสมกับข้อมูลโดยพิจารณาจากข้อสมมติเบื้องต้นของตัวแบบแล้ว การได้ตัวแบบที่เหมาะสมยังขึ้นอยู่กับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ ซึ่งมีมากมายหลายวิธี Ismail and Jemain (2007) ได้ประมาณค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอยกรณีที่มีตัวแปรอธิบาย k ตัวแปร $(\beta_0, \beta_1, ...\beta_k : \underset{\sim}{\beta})$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted least squares estimation: WLSE) และประมาณค่าพารามิเตอร์การกระจายด้วยวิธีโมเมนต์ (Moment estimation: ME) โดยการประมาณค่าสถิติเพียร์สันไคสแควร์ด้วยองศาเสรีในตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไป ซึ่งประยุกต์ใช้กับข้อมูล 3 ชุด ได้แก่ ชุดที่ 1 คือ ข้อมูลความถี่ในการเรียกร้องความเสียหายจากทรัพย์สินส่วนตัวของบุคคลที่สามจากบริษัทประกันภัยในประเทศมาเลเซีย ชุดที่ 2 คือ ข้อมูลจำนวนครั้งที่เรือเกิดความเสียหาย ข้อมูลจาก Lloyd's Register of shipping และ ชุดที่ 3 คือ ข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องสิทธิ์ประกันภัยรถยนต์จากบริษัทประกันภัยรถยนต์ส่วนตัวของประเทศแคนาดา ส่วน Zamani and Ismail (2012) ประมาณค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอยและประมาณค่าพารามิเตอร์การกระจายด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood estimation: MLE) ซึ่งประยุกต์ใช้กับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องสิทธิ์ประกันภัยรถยนต์จากบริษัทประกันภัยรถยนต์ส่วนตัวของประเทศมาเลเซีย

ในปี ค.ศ 1956 Quenouille (อ้างถึงใน Miller, 1974) เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีแจ็กไนฟ์ (Jackknife) เพื่อลดความเอนเอียงของตัวประมาณค่า ซึ่งเป็นวิธีการสุ่มตัวอย่างเพื่อสร้างตัวอย่างชุดใหม่จากตัวอย่างสุ่มที่มีเพียงชุดเดียว โดยมีการเลือกตัวอย่างซ้ำแบบไม่คืนที่ (Resampling without replacement) ซึ่งตัวอย่างชุดใหม่จะมีขนาดตัวอย่างน้อยกว่าชุดเดิมอยู่ d ค่า โดยทั่วไปนิยมกำหนดค่า d เท่ากับ 1 และเมื่อได้ข้อมูลชุดใหม่แล้วถึงจะนำมาใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ และต่อมา Türkan and Özel (2017) เสนอวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยทวินามเชิงลบด้วยวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Jackknife maximum likelihood estimation: JMLE) และเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด พบว่า ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ส่วนใหญ่วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ผลไม่แตกต่างกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด แต่ในบางสถานการณ์พบว่าวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะให้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวม (Sum of mean square error) และความเอนเอียงรวม (Sum of bias) น้อยกว่าการใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

จากแนวความคิดต่าง ๆ เกี่ยวกับการประมาณค่าข้างต้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอยและพารามิเตอร์การกระจายด้วยวิธีเดิม ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีโมเมนต์ นอกจากนี้ยังศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่นำวิธีแจ็กไนฟ์มาใช้ร่วม ได้แก่ วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ (Jackknife moment estimation: JME) จากนั้นเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 4 วิธี โดยใช้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมเป็นเกณฑ์ในการพิจารณาเลือกวิธีการประมาณค่าที่เหมาะสมในสถานการณ์ต่าง ๆ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย และพารามิเตอร์การกระจายของตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไปกรณีที่มีตัวแปรอธิบาย 1 ตัวแปร โดยวิธีการประมาณพารามิเตอร์ 4 วิธี ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีโมเมนต์ และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ มีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้

$\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \varphi \end{bmatrix}_{3\times 1}$ แทน เวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์

$\hat{\underset{\sim}{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ แทน เวกเตอร์ของค่าประมาณพารามิเตอร์

1.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็น (Loglikelihood Function) คือ

$$\ell(\underset{\sim}{\theta}) = \ln L(\beta_0, \beta_1, \varphi)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\beta_0 + \beta_1 X_i + (y_i - 1)\ln(\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i) + \varphi y_i) - y_i \ln(1+\varphi) - \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i) + \varphi y_i}{1+\varphi} - \ln(y_i!)\right] \quad (2)$$

สมการปกติที่ได้ มีดังนี้

$$\frac{\partial \ell(\underset{\sim}{\theta})}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{(y_i - 1)\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i)}{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i) + \varphi y_i} - \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i)}{1+\varphi}\right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \ell(\underset{\sim}{\theta})}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n}\left[X_i + \frac{(y_i - 1)X_i \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i)}{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i) + \varphi y_i} - \frac{X_i \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i)}{1+\varphi}\right] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ell(\underset{\sim}{\theta})}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(y_i - 1)y_i}{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i) + \varphi y_i} - \frac{2y_i}{1+\varphi} + \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_i) + \varphi y_i}{(1+\varphi)^2}\right] = 0 \quad (5)$$

ใช้วิธีการแก้สมการไม่เชิงเส้นแบบมีกระบวนการย้อนซ้ำ โดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) มาช่วยในการแก้สมการ (3), (4) และ (5) เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ β_0, β_1 และ φ

สมการที่ใช้ในการย้อนซ้ำ (Gould and Sribney, 1999)

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(r+1)} = \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(r)} - H(\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(r)})^{-1} u(\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(r)}) \quad (6)$$

โดยที่

$\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(r+1)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^{(r+1)} \\ \hat{\beta}_1^{(r+1)} \\ \hat{\varphi}^{(r+1)} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ คือ เวกเตอร์ของค่าประมาณพารามิเตอร์ รอบที่ r+1 โดยที่ r = 0, 1, 2, …

$\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(r)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^{(r)} \\ \hat{\beta}_1^{(r)} \\ \hat{\varphi}^{(r)} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ คือ เวกเตอร์ของค่าประมาณพารามิเตอร์ รอบที่ r

$u(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})$ คือ เวกเตอร์ของอนุพันธ์อันดับที่ 1 รอบที่ r

$$u(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \varphi} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \dfrac{(y_i - 1)\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i} - \dfrac{\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{1 + \hat{\varphi}^{(r)}} \right] \\ \sum_{i=1}^{n} \left[X_i + \dfrac{(y_i - 1)X_i \exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i} - \dfrac{X_i \exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{1 + \hat{\varphi}^{(r)}} \right] \\ \sum_{i=1}^{n} \left[\dfrac{(y_i - 1) y_i}{\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)}) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i} - \dfrac{2 y_i}{1 + \hat{\varphi}^{(r)}} + \dfrac{\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i}{(1 + \hat{\varphi}^{(r)})^2} \right] \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$H(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})$ คือ เมทริกซ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 รอบที่ r (Hessian matrix)

$$H(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_0^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_0 \partial \varphi} \\ \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_1^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_1 \partial \varphi} \\ \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \varphi \partial \beta_0} & \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \varphi \partial \beta_1} & \dfrac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \varphi^2} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

โดยที่

$$\frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_0^{\,2}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(y_i - 1)(\hat{\varphi}^{(r)} y_i)(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i))}{(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i)^2} - \frac{\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{1 + \hat{\varphi}^{(r)}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_1^{\,2}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i (y_i - 1)\hat{\varphi}^{(r)} X_i^{\,2} (\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i))}{(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i)^2} - \frac{X_i^{\,2} (\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i))}{1 + \hat{\varphi}^{(r)}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \varphi^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{(y_i - 1) y_i^{\,2}}{(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i)^2} + \frac{3 y_i}{(1 + \hat{\varphi}^{(r)})^2} - \frac{2(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i)}{(1 + \hat{\varphi}^{(r)})^3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = \frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\hat{\varphi}^{(r)} y_i (y_i - 1) X_i \exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i)^2} - \frac{X_i (\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i))}{1 + \hat{\varphi}^{(r)}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \varphi \partial \beta_0} = \frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_0 \partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i (y_i - 1)\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i)^2} + \frac{\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{(1 + \hat{\varphi}^{(r)})^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \varphi \partial \beta_1} = \frac{\partial^2 \ell(\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{(r)})}{\partial \beta_1 \partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i (y_i - 1) X_i \exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{(\exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i) + \hat{\varphi}^{(r)} y_i)^2} + \frac{X_i \exp(\hat{\beta}_0^{(r)} + \hat{\beta}_1^{(r)} X_i)}{(1 + \hat{\varphi}^{(r)})^2} \right)$$

ขั้นตอนของกระบวนการย้อนซ้ำ

(1) กำหนดค่า $\hat{\beta}_0^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)}$ และ $\hat{\varphi}^{(0)}$

(2) นำค่า $\hat{\beta}_0^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)}$ และ $\hat{\varphi}^{(0)}$ แทนในสมการการย้อนซ้ำรอบที่ r = 0 เพื่อหาค่า $\hat{\beta}_0^{(1)}, \hat{\beta}_1^{(1)}$ และ $\hat{\varphi}^{(1)}$

(3) ดำเนินการทำซ้ำเช่นเดียวกับขั้นตอน (2) เพื่อหาค่า $\hat{\beta}_0^{(r)}, \hat{\beta}_1^{(r)}$ และ $\hat{\varphi}^{(r)}$

(4) เกณฑ์การหยุดของกระบวนการย้อนซ้ำ พิจารณาจาก $|\hat{\beta}_0^{(r+1)} - \hat{\beta}_0^{(r)}|, |\hat{\beta}_1^{(r+1)} - \hat{\beta}_1^{(r)}|$ และ $|\hat{\varphi}^{(r+1)} - \hat{\varphi}^{(r)}|$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.000001 เนื่องจากค่าดังกล่าวมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ นั่นแสดงว่าค่าประมาณที่ได้กับค่าพารามิเตอร์จะมีค่าใกล้เคียงกันมาก ในการศึกษานี้จึงกำหนดให้ความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ คือ 0.000001 และกำหนดให้เป็นเกณฑ์การหยุดของกระบวนการย้อนซ้ำ

เมื่อ $|\hat{\beta}_0^{(r+1)} - \hat{\beta}_0^{(r)}|, |\hat{\beta}_1^{(r+1)} - \hat{\beta}_1^{(r)}|$ และ $|\hat{\varphi}^{(r+1)} - \hat{\varphi}^{(r)}|$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.000001 กำหนดให้ $\hat{\beta}_0^{MLE} = \hat{\beta}_0^{(r+1)}, \hat{\beta}_1^{MLE} = \hat{\beta}_1^{(r+1)}$ และ $\hat{\varphi}^{MLE} = \hat{\varphi}^{(r+1)}$ เป็นค่าประมาณพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย β_0, β_1 และพารามิเตอร์การกระจาย φ ตามลำดับ

1.2 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด มีขั้นตอนดังนี้

(1) จำลองชุดตัวอย่างใหม่จากตัวอย่างเดิมซึ่งมีขนาด n โดยชุดตัวอย่างใหม่ที่ J ได้จากการตัดข้อมูลตำแหน่งที่ J ออกจากตัวอย่างเดิม เมื่อ J = 1, 2 ,..., n ดังนั้นจะได้ชุดตัวอย่างใหม่จำนวน n ชุดตัวอย่าง

(2) นำข้อมูลจากชุดตัวอย่างใหม่ที่ได้ชุดที่ J ไปใช้ในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย $(\hat{\beta}_{0,MLE}^{(J)}, \hat{\beta}_{1,MLE}^{(J)})$ และ ค่าประมาณพารามิเตอร์การกระจาย $(\hat{\varphi}_{MLE}^{(J)})$ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยที่ $\hat{\beta}_{0,MLE}^{(J)}, \hat{\beta}_{1,MLE}^{(J)}$ และ $\hat{\varphi}_{MLE}^{(J)}$ แทน ค่าประมาณ β_0, β_1 และ φ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด จากตัวอย่างชุดที่ J ตามลำดับ

(3) จะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ดังนี้

$$\hat{\beta}_0^{JMLE} = \frac{\sum_{J=1}^{n} \hat{\beta}_{0,MLE}^{(J)}}{n}, \quad \hat{\beta}_1^{JMLE} = \frac{\sum_{J=1}^{n} \hat{\beta}_{1,MLE}^{(J)}}{n} \quad \text{และ} \quad \hat{\varphi}^{JMLE} = \frac{\sum_{J=1}^{n} \hat{\varphi}_{MLE}^{(J)}}{n}$$

1.3 วิธีโมเมนต์

หลักการของวิธีโมเมนต์ คือ โมเมนต์ที่ k ของตัวอย่างเป็นค่าประมาณโมเมนต์ที่ k ของประชากร นั่นคือ $\mu'_k \approx M'_k$ โดยที่ $\mu'_k = E(Y^k), M'_k = Y_i^k$ และ k = 1, 2, … (Casella and Berger, 2002)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีโมเมนต์ เมื่อกำหนดให้ $\hat{\beta}_0^{ME}, \hat{\beta}_1^{ME}$ และ $\hat{\varphi}^{ME}$ แทน ค่าประมาณพารามิเตอร์ β_0, β_1 และ φ ในตัวแบบการถดถอยปัวซงนัยทั่วไป ตามลำดับ สามารถหาได้ ดังนี้

(1) หาโมเมนต์อันดับที่ 1

โมเมนต์อันดับที่ 1 ของประชากร คือ

$$\mu'_1 = E(Y_i) = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i) = \lambda_i$$

โมเมนต์อันดับที่ 1 ของตัวอย่าง คือ $M_1' = Y_i$

โมเมนต์อันดับที่ 1 ของตัวอย่างเป็นตัวประมาณโมเมนต์อันดับที่ 1 ของประชากร จะได้

$$M_1' \approx \mu_1'$$

$$Y_i \approx \lambda_i$$

$$Y_i \approx \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i)$$

$$\ln Y_i \approx \beta_0 + \beta_1 X_i$$

กำหนดให้ Q เป็นค่าผลรวมความแตกต่างกำลังสองระหว่างค่า $\ln Y_i$ และ $\beta_0 + \beta_1 X_i$ โดยที่ i = 1, 2, …, n

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

จะได้ $\hat{\beta}_0^{ME}$ และ $\hat{\beta}_1^{ME}$ ที่ให้ค่า Q มีค่าต่ำที่สุด ดังนี้

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta_1} (\ln Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 = 0$$

$$\hat{\beta}_1^{ME} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (\ln Y_i) - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n(\overline{X})^2}$$

และ

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta_0} (\ln Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 = 0$$

$$\hat{\beta}_0^{ME} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i}{n} - \hat{\beta}_1^{ME} \overline{X}$$

และกำหนดให้ $\ln Y_i \approx \ln(Y_i + 0.5)$ เมื่อ $Y_i = 0$ (Cameron and Trivedi, 1998)

(2) หาโมเมนต์อันดับที่ 2

โมเมนต์อันดับที่ 2 ของประชากร คือ $\mu_2' = E(Y_i^2) = V(Y_i) + (E(Y_i))^2 = (1+\varphi)^2 \lambda_i + \lambda_i^2$

โมเมนต์อันดับที่ 2 ของตัวอย่าง คือ $M'_2 = Y_i^2$

โมเมนต์อันดับที่ 2 ของตัวอย่างเป็นตัวประมาณโมเมนต์อันดับที่ 2 ของประชากร จะได้

$$M'_2 \approx \mu'_2$$

$$Y_i^2 \approx (1+\varphi)^2 \lambda_i + \lambda_i^2$$

เมื่อแทน $\lambda_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i)$ ด้วย $\hat{\lambda}_i^{ME} = \exp(\hat{\beta}_0^{ME} + \hat{\beta}_1^{ME} X_i)$ จะได้

$$\hat{\varphi}^{ME} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{Y_i^2 - \exp\{2(\hat{\beta}_0^{ME} + \hat{\beta}_1^{ME} X_i)\}}{\exp(\hat{\beta}_0^{ME} + \hat{\beta}_1^{ME} X_i)}\right]}$$

จากการจำลองสถานการณ์ $\hat{\varphi}^{ME}$ ที่ได้จะใกล้เคียง φ ในกรณีที่

$$\hat{\varphi}^{ME} = -1 + \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{Y_i^2 - \exp\{2(\hat{\beta}_0^{ME} + \hat{\beta}_1^{ME} X_i)\}}{\exp(\hat{\beta}_0^{ME} + \hat{\beta}_1^{ME} X_i)}\right]}$$

<u>1.4 วิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์</u>

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ มีขั้นตอนดังนี้

(1) จำลองชุดตัวอย่างใหม่จากตัวอย่างเดิมซึ่งมีขนาด n โดยชุดตัวอย่างใหม่ที่ J ได้จากการตัดข้อมูลตำแหน่งที่ J ออกจากตัวอย่างเดิม เมื่อ J = 1, 2 ,..., n ดังนั้นจะได้ชุดตัวอย่างใหม่จำนวน n ชุดตัวอย่าง

(2) นำข้อมูลจากชุดตัวอย่างใหม่ที่ได้ชุดที่ J ไปใช้ในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย $(\hat{\beta}_{0,ME}^{(J)}, \hat{\beta}_{1,ME}^{(J)})$ และ ค่าประมาณพารามิเตอร์การกระจาย $(\hat{\varphi}_{ME}^{(J)})$ ด้วยวิธีโมเมนต์ โดยที่ $\hat{\beta}_{0,ME}^{(J)}, \hat{\beta}_{1,ME}^{(J)}$ และ $\hat{\varphi}_{ME}^{(J)}$ แทน ค่าประมาณ β_0, β_1 และ φ ด้วยวิธีโมเมนต์ จากตัวอย่างชุดที่ J ตามลำดับ

(3)จะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ ดังนี้

$$\hat{\beta}_0^{JME} = \frac{\sum_{J=1}^{n}\hat{\beta}_{0,ME}^{(J)}}{n} \;,\; \hat{\beta}_1^{JME} = \frac{\sum_{J=1}^{n}\hat{\beta}_{1,ME}^{(J)}}{n} \text{ และ } \hat{\varphi}^{JME} = \frac{\sum_{J=1}^{n}\hat{\varphi}_{ME}^{(J)}}{n}$$

<u>2. ขอบเขตในการวิจัย</u>

2.1) วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการศึกษาในครั้งนี้ ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีโมเมนต์ และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์

2.2) ตัวแปรอธิบายมีการแจกแจงปรกติ โดยที่มีค่าเฉลี่ย เท่ากับ 0 และค่าความแปรปรวน เท่ากับ 1

2.3) ค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอยของตัวแบบ คือ $\beta_0 = 0$ และ β_1 = -0.5, -0.3, 0.3 และ 0.5 ซึ่งกำหนดให้ครอบคลุมกรณีที่ตัวแปรอธิบายกับตัวแปรตอบสอบสนองมีความสัมพันธ์ในทิศทางตรงกันข้าม และทิศทางเดียวกัน

2.4) ค่าพารามิเตอร์การกระจาย คือ -0.5, -0.3, 0, 0.3 และ 0.5 ได้กำหนดลักษณะของข้อมูลให้มีการกระจายครบทั้ง 3 ลักษณะ ได้แก่ การกระจายต่ำกว่าเกณฑ์, การกระจายเท่ากับเกณฑ์ และการกระจายสูงกว่าเกณฑ์

2.5) ขนาดตัวอย่างที่ทำการศึกษา ได้แก่ ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก คือ 20 ขนาดตัวอย่างขนาดกลาง คือ 50 และ 100 ขนาดตัวอย่างขนาดใหญ่ คือ 300

2.6) การจำลองข้อมูลในแต่ละสถานการณ์โดยทำซ้ำมีวัตถุประสงค์เพื่อประเมินความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณที่ได้และเพิ่มความแม่นยำของการประมาณค่า (Sahai and Khurshid, 2001) ในการศึกษานี้จึงกำหนดจำนวนรอบในการทำซ้ำเป็น 1,000 ครั้ง

2.7) พิจารณาการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ จากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวม ดังนี้

สูตรการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวม

$$M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi}) = M\hat{S}E(\hat{\beta}_0) + M\hat{S}E(\hat{\beta}_1) + M\hat{S}E(\hat{\varphi})$$

โดยที่

$$M\hat{S}E(\hat{\beta}_0) = \frac{\sum_{s=1}^{1,000} (\beta_0 - \hat{\beta}_{0s})^2}{1,000}, \quad M\hat{S}E(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum_{s=1}^{1,000} (\beta_1 - \hat{\beta}_{1s})^2}{1,000} \text{ และ } M\hat{S}E(\hat{\varphi}) = \frac{\sum_{s=1}^{1,000} (\varphi - \hat{\varphi}_s)^2}{1,000}$$

สูตรการคำนวณความเอนเอียงรวม

$$(B\hat{i}as(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi}))^2 = (\overline{\hat{\beta}}_0 - \beta_0)^2 + (\overline{\hat{\beta}}_1 - \beta_1)^2 + (\overline{\hat{\varphi}} - \varphi)^2$$

จะได้ $$B\hat{i}as(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi}) = \sqrt{(\overline{\hat{\beta}}_0 - \beta_0)^2 + (\overline{\hat{\beta}}_1 - \beta_1)^2 + (\overline{\hat{\varphi}} - \varphi)^2}$$

โดยที่

$$\overline{\hat{\beta}}_0 = \frac{\sum_{s=1}^{1,000} \hat{\beta}_{0s}}{1,000}, \quad \overline{\hat{\beta}}_1 = \frac{\sum_{s=1}^{1,000} \hat{\beta}_{1s}}{1,000} \text{ และ } \overline{\hat{\varphi}} = \frac{\sum_{s=1}^{1,000} \hat{\varphi}_s}{1,000}$$

เมื่อ $\hat{\beta}_{0s}, \hat{\beta}_{1s}$ และ $\hat{\varphi}_s$ แทนค่าประมาณพารามิเตอร์ β_0, β_1 และ φ ตามลำดับ

ผลการวิจัย

ตารางที่ 1 $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ และ $B\hat{i}as(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 4 วิธี กรณี $\beta_0 = 0$ และ β_1 = -0.3, -0.5

φ	n	β_1 = -0.3				β_1 = -0.5			
		MLE	JMLE	ME	JME	MLE	JMLE	ME	JME
-0.5	20	0.371 (0.566)	0.372 (0.568)	0.123 (0.317)	**0.121** **(0.315)**	0.270 (0.444)	0.267 (0.441)	0.159 (0.382)	**0.158** **(0.380)**
	50	0.262 (0.457)	0.273 (0.398)	**0.064** **(0.226)**	**0.064** **(0.226)**	0.359 (0.515)	0.431 (0.432)	**0.119** **(0.337)**	**0.119** **(0.337)**
	100	0.244 (0.467)	0.255 (0.412)	**0.071** **(0.256)**	**0.071** **(0.256)**	0.483 (0.679)	0.535 (0.643)	**0.088** **(0.284)**	**0.088** **(0.284)**
	300	0.241 (0.483)	0.244 (0.468)	**0.074** **(0.268)**	**0.074** **(0.268)**	0.355 (0.564)	0.353 (0.551)	**0.097** **(0.307)**	**0.097** **(0.307)**
-0.3	20	0.356 (0.550)	0.413 (0.593)	0.071 (0.235)	**0.070** **(0.234)**	0.302 (0.459)	0.303 (0.452)	0.173 (0.380)	**0.172** **(0.379)**
	50	0.218 (0.379)	0.228 (0.385)	**0.069** **(0.240)**	**0.069** **(0.240)**	0.229 (0.410)	0.246 (0.316)	**0.135** **(0.313)**	**0.135** **(0.313)**
	100	0.212 (0.406)	0.332 (0.316)	**0.046** **(0.202)**	**0.046** **(0.202)**	0.152 (0.291)	0.222 (0.305)	**0.067** **(0.250)**	**0.067** **(0.250)**
	300	0.224 (0.449)	0.194 (0.417)	**0.041** **(0.202)**	**0.041** **(0.202)**	0.141 (0.260)	0.232 (0.287)	**0.056** **(0.233)**	**0.056** **(0.233)**
0	20	0.120 (0.107)	0.137 **(0.090)**	**0.089** (0.173)	**0.089** (0.171)	**0.185** (0.356)	0.214 **(0.346)**	0.797 (0.836)	0.817 (0.847)
	50	0.049 **(0.047)**	0.058 (0.049)	**0.044** (0.128)	**0.044** (0.128)	**0.073** **(0.082)**	0.108 (0.087)	0.102 (0.261)	0.102 (0.261)
	100	**0.032** (0.028)	0.034 **(0.027)**	0.036 (0.136)	0.036 (0.136)	**0.050** **(0.061)**	0.091 (0.082)	0.078 (0.241)	0.078 (0.241)
	300	**0.012** (0.014)	0.013 **(0.013)**	0.023 (0.131)	0.023 (0.131)	**0.045** **(0.091)**	0.065 (0.096)	0.058 (0.226)	0.058 (0.226)
0.3	20	**0.245** **(0.282)**	0.255 **(0.282)**	0.329 (0.400)	0.320 (0.392)	**0.269** **(0.335)**	0.296 (0.337)	0.324 (0.415)	0.316 (0.408)
	50	**0.214** **(0.343)**	0.239 (0.348)	0.335 (0.466)	0.333 (0.465)	**0.221** **(0.713)**	0.243 (0.716)	0.383 (0.844)	0.381 (0.842)
	100	**0.177** **(0.360)**	**0.177** **(0.360)**	0.302 (0.492)	0.302 (0.492)	**0.178** **(0.358)**	0.189 (0.364)	0.338 (0.530)	0.338 (0.530)
	300	**0.156** **(0.375)**	**0.156** **(0.375)**	0.275 (0.506)	0.275 (0.506)	**0.158** **(0.377)**	0.160 (0.378)	0.306 (0.535)	0.306 (0.534)
0.5	20	**0.761** (0.616)	0.766 **(0.602)**	1.566 (0.880)	1.507 (0.863)	**0.668** (0.591)	0.678 **(0.583)**	1.185 (0.837)	1.149 (0.822)
	50	**0.643** **(0.703)**	0.691 (0.712)	1.488 (1.081)	1.479 (1.078)	**0.544** **(0.643)**	0.564 (0.649)	1.224 (0.977)	1.217 (0.974)
	100	**0.945** **(0.782)**	1.057 (0.814)	1.659 (1.216)	1.657 (1.215)	**0.605** **(0.711)**	0.658 (0.712)	1.662 (1.192)	1.660 (1.191)
	300	**0.697** **(0.774)**	0.752 (0.788)	1.627 (1.195)	1.622 (1.193)	**0.724** **(0.824)**	0.760 (0.841)	1.676 (1.261)	1.676 (1.261)

หมายเหตุ : ค่านอกวงเล็บ คือค่า $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$, ค่าในวงเล็บ คือค่า $B\hat{i}as(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$, ค่า $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ตัวหนา หมายถึงค่า $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ที่มีค่าต่ำที่สุดในสถานการณ์นั้น และค่า $B\hat{i}as(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ตัวหนา หมายถึง ค่า $B\hat{i}as(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ที่มีค่าต่ำที่สุดในสถานการณ์นั้น

จากตารางที่ 1 ในการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 4 วิธี เมื่อ $\beta_0 = 0$ และ $\beta_1 = -0.3$ พบว่า กรณีที่ φ เท่ากับ -0.3 และ -0.5 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด โดยเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 100 และ 300 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมเท่ากัน กรณีที่ φ เท่ากับ 0 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 และ 300 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด กรณีที่ φ เท่ากับ 0.3 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด โดยเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 และ 300 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมเท่ากัน และเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 100 และ 300 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมเท่ากัน ส่วนในกรณี φ เท่ากับ 0.5 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด

เมื่อ $\beta_0 = 0$ และ $\beta_1 = -0.5$ พบว่า กรณีที่ φ เท่ากับ -0.3 และ -0.5 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด โดยเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 100 และ 300 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมเท่ากัน กรณีที่ φ เท่ากับ 0 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด กรณีที่ φ เท่ากับ 0.3 พบว่า ทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด กรณีที่ φ เท่ากับ 0.5 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด

ตารางที่ 2 $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ และ $B\hat{i}as(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 4 วิธี กรณี $\beta_0 = 0$ และ $\beta_1 = 0.3, 0.5$

φ	n	β_1 = 0.3				β_1 = 0.5			
		MLE	JMLE	ME	JME	MLE	JMLE	ME	JME
-0.5	20	0.231 (0.416)	0.232 (0.416)	0.095 (0.266)	**0.094** **(0.263)**	0.368 (0.515)	0.543 (0.380)	0.149 (0.328)	**0.148** **(0.326)**
	50	0.171 (0.384)	0.170 (0.383)	**0.077** **(0.261)**	**0.077** **(0.261)**	0.237 (0.450)	0.291 (0.330)	**0.098** **(0.298)**	**0.098** **(0.298)**
	100	0.243 (0.476)	0.270 (0.457)	**0.077** **(0.266)**	**0.077** **(0.266)**	0.228 (0.434)	0.248 (0.328)	**0.095** **(0.299)**	**0.095** **(0.299)**
	300	0.238 (0.484)	0.236 (0.473)	**0.072** **(0.266)**	**0.072** **(0.266)**	0.213 (0.421)	0.211 (0.409)	**0.099** **(0.310)**	**0.099** **(0.310)**
-0.3	20	0.231 (0.390)	0.232 (0.384)	0.125 (0.314)	**0.124** **(0.313)**	0.163 (0.355)	0.169 (0.350)	0.127 (0.324)	**0.126** **(0.322)**
	50	0.168 (0.334)	0.168 (0.337)	**0.055** **(0.202)**	**0.055** **(0.202)**	0.233 (0.366)	0.210 (0.330)	**0.104** **(0.308)**	**0.104** **(0.308)**
	100	0.163 (0.326)	0.205 (0.349)	**0.043** **(0.196)**	**0.043** **(0.196)**	0.230 (0.421)	0.210 (0.238)	**0.087** **(0.236)**	**0.087** **(0.236)**
	300	0.166 (0.380)	0.187 (0.300)	**0.037** **(0.190)**	**0.037** **(0.190)**	0.217 (0.440)	0.181 (0.378)	**0.069** **(0.258)**	**0.069** **(0.258)**
0	20	0.185 **(0.115)**	0.198 (0.117)	**0.091** (0.177)	**0.091** (0.176)	0.462 (0.203)	0.475 **(0.200)**	**0.405** (0.308)	0.410 (0.308)
	50	0.091 (0.147)	0.104 (0.141)	0.052 (0.141)	**0.051** **(0.140)**	0.443 **(0.193)**	0.486 (0.201)	**0.313** (0.278)	0.314 (0.278)
	100	0.038 (0.058)	0.056 **(0.055)**	0.037 (0.150)	**0.036** (0.150)	0.384 **(0.106)**	0.414 (0.115)	**0.288** (0.246)	**0.288** (0.246)
	300	0.037 **(0.072)**	0.045 **(0.072)**	**0.025** (0.139)	**0.025** (0.139)	0.180 (0.307)	0.242 (0.329)	**0.048** **(0.205)**	**0.048** **(0.205)**
0.3	20	**0.336** (0.451)	0.350 **(0.329)**	0.455 (0.473)	0.442 (0.464)	**0.352** (0.672)	0.384 **(0.671)**	0.413 (0.693)	0.403 (0.684)
	50	**0.205** **(0.319)**	0.223 (0.328)	0.307 (0.435)	0.305 (0.433)	**0.193** (0.686)	0.239 **(0.683)**	0.321 (0.791)	0.319 (0.790)
	100	**0.176** **(0.353)**	0.186 (0.358)	0.297 (0.489)	0.296 (0.488)	**0.194** **(0.348)**	0.231 (0.359)	0.361 (0.547)	0.361 (0.547)
	300	**0.155** **(0.376)**	0.156 (0.382)	0.280 (0.514)	0.280 (0.512)	**0.173** **(0.377)**	0.179 (0.379)	0.350 (0.575)	0.350 (0.575)
0.5	20	0.743 (1.237)	**0.737** **(1.233)**	1.294 (1.312)	1.254 (1.299)	**0.728** (0.585)	0.823 **(0.582)**	1.170 (0.777)	1.132 (0.761)
	50	**0.760** (0.770)	0.785 **(0.768)**	1.794 (1.190)	1.784 (1.187)	**0.786** **(0.786)**	0.828 (0.794)	1.677 (1.151)	1.668 (1.148)
	100	**0.765** **(0.819)**	0.787 (0.823)	1.736 (1.239)	1.734 (1.239)	**0.718** **(0.790)**	0.818 (0.792)	1.623 (1.203)	1.620 (1.202)
	300	**0.759** **(0.854)**	**0.759** **(0.854)**	1.757 (1.299)	1.757 (1.299)	**0.726** **(0.825)**	0.731 (0.828)	1.796 (1.311)	1.796 (1.311)

หมายเหตุ : ค่านอกวงเล็บ คือค่า $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$, ค่าในวงเล็บ คือค่า $Bias(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$, ค่า $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ตัวหนา หมายถึงค่า $M\hat{S}E(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ที่มีค่าต่ำที่สุดในสถานการณ์นั้น และค่า $Bias(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ตัวหนา หมายถึง ค่า $Bias(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\varphi})$ ที่มีค่าต่ำที่สุดในสถานการณ์นั้น

จากตารางที่ 2 ในการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวม และความเอนเอียงรวมของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 4 วิธี เมื่อ $\beta_0 = 0$ และ $\beta_1 = 0.3$ พบว่า กรณีที่ φ เท่ากับ -0.3 และ -0.5 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด โดยเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 100 และ 300 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวม

เท่ากัน กรณีที่ φ เท่ากับ 0 พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 วิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 วิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด และเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 300 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด กรณีที่ φ เท่ากับ 0.3 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวม และความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด ส่วนในกรณี φ เท่ากับ 0.5 พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด และเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 300 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด

เมื่อ $\beta_0 = 0$ และ $\beta_1 = 0.5$ พบว่า กรณีที่ φ เท่ากับ -0.3 และ -0.5 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด โดยเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 100 และ 300 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวม และความเอนเอียงรวมเท่ากัน กรณีที่ φ เท่ากับ 0 พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีโมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 วิธีโมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด และเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 300 วิธีโมเมนต์และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด กรณีที่ φ เท่ากับ 0.3 พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 50 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ส่วนวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 และ 300 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด กรณีที่ φ เท่ากับ 0.5 พบว่าทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมต่ำที่สุด ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความเอนเอียงรวมต่ำที่สุด

วิจารณ์ผลการวิจัย

การประมาณค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอยและพารามิเตอร์การกระจายด้วยวิธีเดิม ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีโมเมนต์มีความเหมาะสมมากกว่าวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่นำวิธีแจ็กไนฟ์มาใช้ร่วม เนื่องจากค่าประมาณที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีที่นำแจ็กไนฟ์มาใช้ร่วมให้ผลลัพธ์ไม่แตกต่างกับค่าประมาณที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีเดิม อีกทั้งการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่นำวิธีแจ็กไนฟ์มาใช้ร่วมค่อนข้างซับซ้อนและใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่าวิธีเดิม ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Türkan and Özel (2017) ที่ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยทวินามเชิงลบด้วยวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

พบว่าในการประมาณค่าพารามิเตอร์ส่วนใหญ่วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ผลไม่แตกต่างวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และสอดคล้องกับงานวิจัยของ Esemokumo *et al*. (2015) ที่ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยอย่างง่ายด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ (Ordinary Least Squares: OLS) และวิธีแจ็กไนฟ์กำลังสองน้อยสุดสามัญ พบว่า ค่าประมาณที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีแจ็กไนฟ์กำลังสองน้อยสุดสามัญให้ผลลัพธ์ไม่แตกต่างกับค่าประมาณที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ

สรุปผลการวิจัย

การศึกษาเพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 4 วิธี ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีโมเมนต์ และวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ โดยพิจารณาเปรียบเทียบจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยรวมและความเอนเอียงรวม พบว่าประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของวิธีแจ็กไนฟ์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ผลไม่แตกต่างกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเช่นเดียวกับวิธีแจ็กไนฟ์โมเมนต์ที่ให้ผลไม่แตกต่างกับวิธีโมเมนต์ โดยกรณีที่ข้อมูลเกิดการกระจายต่ำกว่าเกณฑ์วิธีโมเมนต์เป็นวิธีที่เหมาะสมกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด กรณีที่ข้อมูลเกิดการกระจายสูงกว่าเกณฑ์วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีที่เหมาะสมกว่าวิธีโมเมนต์ และกรณีที่ข้อมูลเกิดการกระจายเท่ากับเกณฑ์วิธีโมเมนต์หรือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีที่เหมาะสม

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่มอบทุนผู้ช่วยสอน/ทุนผู้ช่วยวิจัย (TA/RA) และขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่มอบทุนสนับสนุนการศึกษาจากสมาคมศิษย์เก่าคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ตรวจประเมินบทความ

เอกสารอ้างอิง

Cameron, A., Trivedi, P.K. (1998). Regression analysis for count data. Cambridge: Cambridge university press.

Casella, G., Berger, R.L. (2002). Statistical Inference. California: Duxbury.

Esemokumo, P.A., Rebecca, B. & Idochi, O. (2015). Jackknife Algorithm on Linear Regression Estimation. International Journal for Research in Mathematics and Statistics, *1*(1), 34-40.

Gould, W., Sribney W. (1999). Maximum likelihood estimation with stata. College station, Tex: Stata press.

Islam, M.M., Alam, M., Tariquzaman, Md., Kabir, M.A., Pervin, R., Begum, & Khan, Md. M. H. (2013). Predictors of the number of under-five malnourished children in Bangladesh: application of the generalized poisson regression model. BMC Public Health, 13.

Ismail, N., Jemain, A. A. (2007). Handling Overdispersion with Negative Binomial and Generalized Poisson Regression Models. Casualty Actuarial Society Forum, 103-158.

McCullagh, P., Nelder, J.A. (1952). Generalized Linear Models. Chapman&Hall/CRC.

Miller, R.G. (1974). The Jackknife--A Review. Biometrika, *60*(1), 1-15.

Sahai, H., Khurshid, A. (2001). Pocket Dictionary of Statistics. McGraw-Hill/Irwin.

Singh, K.P., Wulu, J.T. & Bartolucci, A.A. (2004). A note on Generalized Poisson Regression Model. *Journal of the Royal Statistical*, 2029-2034

Türkan, S., Özel, G. (2017). A Jackknifed estimators for the negative binomial. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 1-21.

Wagh, Y.S., Kamalja, K.K. (2017). Modelling Auto Insurance Claims in Singapore. Sri Lankan Journal of Applied Statistics, *18*(2), 105-118.

Zamani, H., Ismail, N. (2012). Functional Form for the Generalized Poisson Regression Model. Communications in Statistics - Theory and Methods, 3666-3675.