วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา ปีที่ 25 (ฉบับที่ 2) พฤษภาคม – สิงหาคม พ.ศ. 2563
BURAPHA SCIENCE JOURNAL Volume 25 (No.2) May – August 2020
บทความวิจัย

ตัวประมาณอัตราส่วนร่วมกับผลคูณแบบเลขชี้กำลัง สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย

Ratio-Cum-Product Type of Exponential Estimator for the Population Mean in Simple Random Sampling using the Information of Auxiliary Variable

ณภัทณ์จันทร์ ด่านสวัสดิ์*

Napattchan Dansawad*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Valaya Alongkorn Rajabhat University under the Royal Patronage

Received : 26 June 2019

Revised : 1 October 2019

Accepted : 25 November 2019

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอตัวประมาณอัตราส่วนร่วมกับผลคูณแบบเลขชี้กำลังของค่าเฉลี่ยประชากร โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วยภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนาตัวประมาณนี้ขึ้นมาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh and Pal (2015) นอกจากนี้สมบัติที่สำคัญบางประการของตัวประมาณอาทิเช่น ความเอนเอียง (Bias) ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (Minimum Mean Squared Error: MMSE) จะถูกนำเสนอ ในขณะที่การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่นำเสนอกับตัวประมาณที่เกี่ยวข้องจะแสดงการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อสนับสนุนผลทางทฤษฎี ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณอัตราส่วนร่วมกับผลคูณแบบ เลขชี้กำลังที่นำเสนอมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

คำสำคัญ : ตัวประมาณอัตราส่วน, ตัวประมาณผลคูณ, ค่าเฉลี่ยประชากร, ความเอนเอียง, ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

Abstract

This paper presents ratio-cum-dual to product type of exponential estimator for the population mean using known value of auxiliary information under simple random sampling scheme. We have adapted the estimator suggested by Singh and Pal (2015). Furthermore, some important properties of the proposed estimator such as the Bias and the Mean-Squared Error (MSE) and its minimum value (MMSE) have been obtained. Efficiency comparisons between the proposed estimator and other existing estimators are also carried out in support of numerical and theoretical findings. The results of this study showed that the proposed estimator is more efficient as compared to all other existing estimators.

Keywords : ratio estimator, product estimator, population mean, bias, Mean Squared Error

*Corresponding author. E-mail : napattchan@vru.ac.th

บทนำ

ในการทำวิจัยเชิงสำรวจส่วนใหญ่ หากประชากรที่ต้องการศึกษามีขนาดใหญ่มาก จะส่งผลกระทบโดยตรงต่อผู้วิจัย ในแง่ของการเก็บรวบรวมข้อมูลให้ได้ครบจากทุกหน่วยของประชากร เนื่องจากอาจมีข้อจำกัดในด้านเวลา ค่าใช้จ่าย หรืออื่น ๆ วิธีการที่เหมาะสมที่จะทำให้ได้ข้อมูลที่ใกล้เคียงกับประชากรมากที่สุดก็คือการเลือกตัวอย่างมาจำนวนหนึ่งที่เป็นตัวแทนที่ดีของประชากร ซึ่งการที่จะได้ตัวแทนที่ดีของประชากรนั้นจะต้องอาศัยเทคนิคทางสถิติที่เรียกว่าเทคนิคการเลือกตัวอย่าง (Sampling Technique) เข้ามาช่วย และเมื่อได้ตัวอย่างที่เป็นตัวแทนที่ดีแล้ว การประมาณค่าของลักษณะที่สนใจศึกษาของประชากรจากตัวอย่างก็จะได้ค่าที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง

สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ จะประมาณด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง (Sample Mean: $\bar{y}$) ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน (Simple Random Sampling Without Replacement: SRSWOR) ตัวประมาณ $\bar{y}$ จะมีความเอนเอียง และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ดังนี้

$$Bias(\bar{y}) = 0 \tag{1}$$

และ

$$MSE(\bar{y}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2 C_y^2 \tag{2}$$

ตามลำดับ

โดยที่ C_y คือ สัมประสิทธิ์การผันแปรของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา y

$$f = \frac{n}{N}$$

และเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการประมาณค่า นักสถิติหลายท่านนิยมนำตัวแปรช่วย (Auxiliary Variable: x) มาใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ย ค่าสัดส่วน รวมถึงค่าความแปรปรวนของประชากร โดยที่ตัวแปรช่วย x นั้นต้องมีความสัมพันธ์กับตัวแปรที่สนใจศึกษา (Study Variable: y) ถ้าตัวแปรช่วย x มีความสัมพันธ์ทางบวกกับตัวแปรที่สนใจศึกษา y ตัวประมาณอัตราส่วน (Ratio Estimator) จะมีประสิทธิภาพและเหมาะสมในการประมาณค่ามากกว่าตัวประมาณรูปแบบอื่น ๆ Cochran (1977) เป็นคนแรกที่ได้เสนอตัวประมาณอัตราส่วนดั้งเดิม (Classical Ratio Estimator) เพื่อใช้ประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\hat{\bar{Y}}_R = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right) \tag{3}$$

ที่มีความเอนเอียง และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{\bar{Y}}_R$ คือ

$$Bias(\hat{\bar{Y}}_R) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}C_x^2(1-K) \tag{4}$$

และ

$$MSE(\hat{Y}_R) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2(1-2K)\right] \qquad (5)$$

ตามลำดับ

โดยที่ $\bar{y}$ คือ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างของตัวแปรที่สนใจศึกษา y

$\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างของตัวแปรช่วย x

$\bar{X}$ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากรของตัวแปรช่วย x

C_x คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรช่วย x

ρ_{yx} คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากรระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา y และตัวแปรช่วย x

$K = \dfrac{\rho_{yx}C_y}{C_x}$

ในเวลาต่อมา Bahl and Tuteja (1991) ได้นำเสนอตัวประมาณอีกรูปแบบหนึ่ง โดยประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง มาสร้างตัวประมาณ และให้ชื่อตัวประมาณนี้ว่าตัวประมาณอัตราส่วนแบบ เลขชี้กำลัง (Ratio-Type Exponential Estimator) สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\hat{Y}_{BT(1)} = \bar{y}\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \qquad (6)$$

ที่มีความเอนเอียง และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{Y}_{BT(1)}$ คือ

$$Bias(\hat{Y}_{BT(1)}) \cong \frac{(1-f)}{8n}\bar{Y}C_x^2(3-4K) \qquad (7)$$

และ

$$MSE(\hat{Y}_{BT(1)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}(1-4K)\right] \qquad (8)$$

ในทางกลับกันถ้าตัวแปรช่วย x และตัวแปรที่สนใจศึกษา y มีความสัมพันธ์กันทางลบ จะพบว่าตัวประมาณแบบผลคูณ (Product Estimator) จะมีประสิทธิภาพและเหมาะสม ซึ่ง Murthy (1964) เป็นคนแรกที่ได้เสนอตัวประมาณในกรณีนี้ มีรูปแบบของตัวประมาณดังนี้

$$\hat{Y}_P = \bar{y}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right) \qquad (9)$$

ที่มีความเอนเอียง และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{Y}_P$ คือ

$$Bias(\hat{Y}_P) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}C_x^2K \qquad (10)$$

และ

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_P) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2(1+2K)\right] \tag{11}$$

เช่นเดียวกันกับ Bahl and Tuteja (1991) ที่ได้เสนอตัวประมาณแบบผลคูณแบบเลขชี้กำลัง (Product-Type Exponential Estimator) สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งมีรูปแบบของตัวประมาณดังนี้

$$\hat{\bar{Y}}_{BT(2)} = \bar{y}\exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right) \tag{12}$$

ที่มีความเอนเอียง และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{\bar{Y}}_{BT(2)}$ คือ

$$Bias(\hat{\bar{Y}}_{BT(2)}) \cong \frac{(1-f)}{8n}\bar{Y}C_x^2(3+4K) \tag{13}$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{BT(2)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}(1+4K)\right] \tag{14}$$

จนกระทั่ง Singh and Pal (2015) ได้พัฒนาตัวประมาณของ Bahl and Tuteja (1991) และนำเสนอตัวประมาณขึ้นมาใหม่ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\hat{\bar{Y}}_{SP(1)} &= \hat{\bar{Y}}_{BT(1)}\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right)\\ &= \bar{y}\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right)\\ &= \bar{y}\exp\left(\frac{2(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{X}+\bar{x}}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

และ

$$\begin{aligned}\hat{\bar{Y}}_{SP(2)} &= \hat{\bar{Y}}_{BT(2)}\exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\\ &= \bar{y}\exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\exp\left(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\\ &= \bar{y}\exp\left(\frac{2(\bar{x}-\bar{X})}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

ที่มีความเอนเอียงของ $\hat{\bar{Y}}_{SP(1)}$ และ $\hat{\bar{Y}}_{SP(2)}$ คือ

$$Bias(\hat{\bar{Y}}_{SP(1)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}C_x^2(1-K) = Bias(\bar{Y}_R) \tag{17}$$

$$Bias(\hat{\bar{Y}}_{SP(2)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}C_x^2K \qquad (18)$$

และมีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{\bar{Y}}_{SP(1)}$ และ $\hat{\bar{Y}}_{SP(2)}$ คือ

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{SP(1)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2(1-2K)\right] = MSE(\bar{Y}_R) \qquad (19)$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{SP(2)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2(1+2K)\right] = MSE(\bar{Y}_P) \qquad (20)$$

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำเสนอตัวประมาณอัตราส่วนร่วมกับผลคูณแบบแลขชี้กำลังของค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย โดยพัฒนาจากตัวประมาณของ Singh and Pal (2015) นอกจากนี้ยังมีการคำนวณหาความเอนเอียง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของตัวประมาณที่จะนำเสนอ พร้อมทั้งจะมีการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณดังกล่าวกับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องทั้งในเชิงทฤษฎีและการคำนวณเชิงตัวเลข

วิธีดำเนินการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยของ Singh and Pal (2015) ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะพัฒนาตัวประมาณอัตราส่วนและผลคูณใหม่ของเลขชี้กำลัง โดยตัวประมาณที่นำเสนอมีรูปแบบดังนี้

$$\hat{\bar{Y}}_{NP} = \bar{y}\left[\alpha \exp\left(\frac{2(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{X}+\bar{x}}\right) + (1-\alpha)\exp\left(\frac{2(\bar{x}-\bar{X})}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\right] \qquad (21)$$

ในการหาความเอนเอียง และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่นำเสนอ จะทำการแปลงให้ตัวประมาณที่นำเสนออยู่ในเทอมค่าคลาดเคลื่อน (Error terms) เมื่อ α คือ ค่าคงที่ใด ๆ ดังนั้น

$\bar{y} = \bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x} = \bar{X}(1+e_1)$

โดยที่ $E(e_0) = E(e_1) = 0$, $E(e_0^2) = \frac{(1-f)}{n}C_y^2$, $E(e_1^2) = \frac{(1-f)}{n}C_x^2$, $E(e_0e_1) = \frac{(1-f)}{n}\rho_{yx}C_yC_x$

ความเอนเอียงของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะหาได้จาก

$$Bias(\hat{\bar{Y}}_{NP}) \cong E\left(\hat{\bar{Y}}_{NP} - \bar{Y}\right)$$

$$\cong E\left(\bar{y}\left[\alpha \exp\left(\frac{2(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{X}+\bar{x}}\right) + (1-\alpha)\exp\left(\frac{2(\bar{x}-\bar{X})}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\right] - \bar{Y}\right) \qquad (22)$$

แทนค่า $\bar{y} = \bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x} = \bar{X}(1+e_1)$ ลงในสมการ (22) จะได้

$$Bias(\hat{\bar{Y}}_{NP}) \cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp\left(\frac{2(\bar{X}-\bar{X}(1+e_1))}{\bar{X}+\bar{X}(1+e_1)}\right)+(1-\alpha)\exp\left(\frac{2(\bar{X}(1+e_1)-\bar{X})}{\bar{X}(1+e_1)+\bar{X}}\right)\right]-\bar{Y}\right)$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp\left(\frac{-2\bar{X}e_1}{2\bar{X}+\bar{X}e_1}\right)+(1-\alpha)\exp\left(\frac{2\bar{X}e_1}{2\bar{X}+\bar{X}e_1}\right)\right]-\bar{Y}\right)$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp[(-e_1)(1+\frac{e_1}{2})^{-1}]+(1-\alpha)\exp[(e_1)(1+\frac{e_1}{2})^{-1}]\right]-\bar{Y}\right) \quad (23)$$

จากพจน์ $(1+x)^{-n}$ สามารถกระจายโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ได้ดังนี้

$$(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!}x^r+\ldots$$

เมื่อเทียบเคียงกับพจน์ข้างต้น ดังนั้นพจน์ $(1+\frac{e_1}{2})^{-1}$ ที่อยู่ในสมการ (23) จะสามารถกระจายโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ได้คือ $(1+\frac{e_1}{2})^{-1} = 1-\left(\frac{e_1}{2}\right)+\left(\frac{e_1}{2}\right)^2-\left(\frac{e_1}{2}\right)^3+\left(\frac{e_1}{2}\right)^4-\ldots$ และพจน์ที่ยกกำลัง 3 เป็นต้นไป จะถูกกำหนดให้เป็นค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Error) กล่าวคือเป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดเทอมท้าย ๆ ของอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งในทางทฤษฎีค่าคาดเคลื่อนดังกล่าวจะเข้าสู่ศูนย์ ทำให้การกระจายของพจน์ $(1+\frac{e_1}{2})^{-1}$ จึงเหลือแค่ $(1+\frac{e_1}{2})^{-1} = 1-\left(\frac{e_1}{2}\right)+\left(\frac{e_1}{2}\right)^2$

นั่นคือ

$$Bias(\hat{\bar{Y}}_{NP}) \cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp\left[(-e_1)\left(1-\frac{e_1}{2}+\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\right)\right]+(1-\alpha)\exp\left[(e_1)\left(1-\frac{e_1}{2}+\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\right)\right]\right]-\bar{Y}\right)$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp(-e_1+\frac{e_1^2}{2})+(1-\alpha)\exp(e_1-\frac{e_1^2}{2})\right]-\bar{Y}\right)$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha(1-e_1+e_1^2)+(1-\alpha)(1+e_1)\right]-\bar{Y}\right)$$

$$\cong E\left(\bar{Y}\left[1+e_0+(e_1-2\alpha e_1)+(e_0e_1-2\alpha e_0e_1)+\alpha e_1^2\right]-\bar{Y}\right)$$

$$\cong E\left(\bar{Y}\left[1+e_0+e_1(1-2\alpha)+e_0e_1(1-2\alpha)+\alpha e_1^2\right]-\bar{Y}\right)$$

$$\cong \bar{Y}E\left(\left[1+e_0+e_1(1-2\alpha)+e_0e_1(1-2\alpha)+\alpha e_1^2\right]-1\right)$$

$$\cong \bar{Y}E\left(e_0+e_1(1-2\alpha)+e_0e_1(1-2\alpha)+\alpha e_1^2\right)$$

$$\cong \bar{Y}\left(E(e_0)+E\left[e_1(1-2\alpha)\right]+E\left[e_0e_1(1-2\alpha)\right]+E\left(\alpha e_1^2\right)\right)$$

$$\cong \bar{Y}\left(0+0+(1-2\alpha)E(e_0e_1)+\alpha E(e_1^2)\right) \tag{24}$$

แทนค่า $E(e_0)=E(e_1)=0$, $E(e_0^2)=\frac{(1-f)}{n}C_y^2$, $E(e_1^2)=\frac{(1-f)}{n}C_x^2$ และ $E(e_0e_1)=\frac{(1-f)}{n}\rho_{yx}C_yC_x$ ลงในสมการ (24) จะได้

$$Bias(\hat{Y}_{NP})\cong \bar{Y}\left((1-2\alpha)\frac{(1-f)}{n}\rho_{yx}C_yC_x+\alpha\frac{(1-f)}{n}C_x^2\right)$$

$$\cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}C_x^2\left[(1-2\alpha)\frac{\rho_{yx}C_y}{C_x}+\alpha\right]$$

$$\cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}C_x^2\left[(1-2\alpha)K+\alpha\right] \tag{25}$$

ในขณะที่ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{Y}_{NP}$ จะหาได้จาก

$$MSE(\hat{Y}_{NP})\cong E\left(\hat{Y}_{NP}-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{y}\left[\alpha\exp\left(\frac{2(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{X}+\bar{x}}\right)+(1-\alpha)\exp\left(\frac{2(\bar{x}-\bar{X})}{\bar{x}+\bar{X}}\right)\right]-\bar{Y}\right)^2 \tag{26}$$

แทนค่า $\bar{y}=\bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x}=\bar{X}(1+e_1)$ ลงในสมการ (26) จะได้

$$MSE(\hat{Y}_{NP})\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp\left(\frac{2(\bar{X}-\bar{X}(1+e_1))}{\bar{X}+\bar{X}(1+e_1)}\right)+(1-\alpha)\exp\left(\frac{2(\bar{X}(1+e_1)-\bar{X})}{\bar{X}(1+e_1)+\bar{X}}\right)\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp\left(\frac{-2\bar{X}e_1}{2\bar{X}+\bar{X}e_1}\right)+(1-\alpha)\exp\left(\frac{2\bar{X}e_1}{2\bar{X}+\bar{X}e_1}\right)\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp[(-e_1)(1+\frac{e_1}{2})^{-1}]+(1-\alpha)\exp[(e_1)(1+\frac{e_1}{2})^{-1}]\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp\left[(-e_1)\left(1-\frac{e_1}{2}+\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\right)\right]+(1-\alpha)\exp\left[(e_1)\left(1-\frac{e_1}{2}+\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\right)\right]\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha\exp(-e_1+\frac{e_1^2}{2})+(1-\alpha)\exp(e_1-\frac{e_1^2}{2})\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{Y}(1+e_0)\left[\alpha(1-e_1+e_1^2)+(1-\alpha)(1+e_1)\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{Y}\left[1+e_0+(e_1-2\alpha e_1)+(e_0e_1-2\alpha e_0e_1)+\alpha e_1^2\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong E\left(\bar{Y}\left[1+e_0+e_1(1-2\alpha)+e_0e_1(1-2\alpha)+\alpha e_1^2\right]-\bar{Y}\right)^2$$

$$\cong \bar{Y}^2E\left[\left(1+e_0+e_1(1-2\alpha)+e_0e_1(1-2\alpha)+\alpha e_1^2\right)-1\right]^2$$

$$\cong \bar{Y}^2E\left[e_0^2+e_1^2(1-2\alpha)^2+2e_0e_1(1-2\alpha)\right] \qquad (27)$$

แทนค่า $E(e_0)=E(e_1)=0$, $E(e_0^2)=\frac{(1-f)}{n}C_y^2$, $E(e_1^2)=\frac{(1-f)}{n}C_x^2$ และ $E(e_0e_1)=\frac{(1-f)}{n}\rho_{yx}C_yC_x$ ลงในสมการ (27) จะได้

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})\cong\bar{Y}^2\left[\frac{(1-f)}{n}C_y^2+\frac{(1-f)}{n}C_x^2(1-2\alpha)^2+2\frac{(1-f)}{n}\rho_{yx}C_yC_x(1-2\alpha)\right]$$

$$\cong\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+C_x^2\left\{(1-2\alpha)^2+2\frac{\rho_{yx}C_y}{C_x}(1-2\alpha)\right\}\right]$$

$$\cong\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+(1-2\alpha)C_x^2\{(1-2\alpha)+2K\}\right] \qquad (28)$$

ในการหาค่า $MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})$ ที่มีค่าต่ำที่สุด จะหาจากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})$ เทียบกับค่า α และให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{\partial MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})}{\partial\alpha}=-4+8\alpha-4K=0 \qquad (29)$$

แก้สมการหาค่า α จากสมการ (29) จะได้

$$\alpha=\frac{K+1}{2}=\alpha_{opt} \qquad (30)$$

หาอนุพันธ์อันดับที่สองของ $MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})$ เทียบกับค่า α จะได้

$$\frac{\partial^2 MSE(\hat{Y}_{NP})}{\partial \alpha^2} = 8 \quad (31)$$

ซึ่งมีค่ามากกว่า 0 ทำให้ได้ $MSE(\hat{Y}_{NP})$ มีค่าต่ำที่สุด และแทนค่า α_{opt} ลงใน (28) จะได้

$$MMSE(\hat{Y}_{NP}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + (1-2\left\{\frac{K+1}{2}\right\})C_x^2\left\{(1-2\left\{\frac{K+1}{2}\right\}) + 2K\right\}\right]$$

$$\cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + (1-\{K+1\})C_x^2\{(1-\{K+1\}) + 2K\}\right]$$

$$\cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 - K^2C_x^2\right]$$

$$\cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 - \frac{\rho_{yx}^2 C_y^2}{C_x^2}C_x^2\right]$$

$$\cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2 C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] \quad (32)$$

ผลการวิจัย

1. ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ และตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องทางทฤษฎี จะพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด โดยมีรายละเอียดดังนี้

<u>เมื่อพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย</u>

1.1 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ และตัวประมาณ $\bar{y}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MSE(\hat{Y}_{NP}) < MSE(\bar{y})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + (1-2\alpha)C_x^2\{(1-2\alpha) + 2K\}\right] < \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2 C_y^2$$

$$K < \frac{2\alpha - 1}{2}$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{C_x}{C_y} - \rho_{yx} > 0 \quad (33)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากอสมการที่ (33) เป็นจริง

1.2 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ กับตัวประมาณ $\hat{Y}_R$ และ $\hat{Y}_{SP(1)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MSE(\hat{Y}_{NP}) < MSE(\hat{Y}_R)$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+(1-2\alpha)C_x^2\{(1-2\alpha)+2K\}\right]<\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+C_x^2(1-2K)\right]$$

$$(1-2\alpha)\{(1-2\alpha)+2K\}<(1-2K)$$

$$\rho_{yx}-\frac{\alpha C_x}{C_y}>0 \qquad (34)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_R$ และ $\hat{\bar{Y}}_{SP(1)}$ ต่อเมื่อเงื่อนไขจากอสมการที่ (34) เป็นจริง

1.3 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ และ ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{BT(1)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})<MSE(\hat{\bar{Y}}_{BT(1)})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+(1-2\alpha)C_x^2\{(1-2\alpha)+2K\}\right]<\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}(1-4K)\right]$$

$$(1-2\alpha)\{(1-2\alpha)+2K\}<\frac{1}{4}(1-4K)$$

$$\rho_{yx}-\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)\frac{C_x}{C_y}>0 \qquad (35)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{BT(1)}$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากอสมการที่ (35) เป็นจริง

1.4 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ กับตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_P$ และ $\hat{\bar{Y}}_{SP(2)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})<MSE(\hat{\bar{Y}}_P)$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+(1-2\alpha)C_x^2\{(1-2\alpha)+2K\}\right]<\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+C_x^2(1+2K)\right]$$

$$(1-2\alpha)\{(1-2\alpha)+2K\}<(1+2K)$$

$$\rho_{yx}-(\alpha-1)\frac{C_x}{C_y}>0 \qquad (36)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_P$ และ $\hat{\bar{Y}}_{SP(2)}$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากอสมการที่ (36) เป็นจริง

1.5. เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ และ ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{BT(2)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP}) < MSE(\hat{\bar{Y}}_{BT(2)})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+(1-2\alpha)C_x^2\{(1-2\alpha)+2K\}\right] < \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}(1+4K)\right]$$

$$(1-2\alpha)C_x^2\{(1-2\alpha)+2K\} < \frac{C_x^2}{4}(1+4K)$$

$$\rho_{yx}-(\alpha-\frac{3}{4})\frac{C_x}{C_y} > 0 \qquad (37)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{BT(2)}$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากอสมการที่ (37) เป็นจริง

เมื่อพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

1.6 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ และตัวประมาณ $\bar{y}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MMSE(\hat{\bar{Y}}_{NP}) < MSE(\bar{y})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2C_y^2$$

$$1-\rho_{yx}^2 < 1$$

$$\rho_{yx}^2 > 0 \qquad (38)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากอสมการที่ (38) เป็นจริง

1.7 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ กับตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{R}$ และ $\hat{\bar{Y}}_{SP(1)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MMSE(\hat{\bar{Y}}_{NP}) < MSE(\hat{\bar{Y}}_{R})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+C_x^2(1-2K)\right]$$

$$C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \left[C_y^2+C_x^2(1-2K)\right]$$

$$(C_x-\rho_{yx}C_y)^2 > 0 \qquad (39)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_{R}$ และ $\hat{Y}_{SP(1)}$ ก็ต่อเมื่ออสมการที่ (39) เป็นจริง

1.8. เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ และ ตัวประมาณ $\hat{Y}_{BT(1)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MMSE(\hat{Y}_{NP}) < MSE(\hat{Y}_{BT(1)})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2 C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}(1-4K)\right]$$

$$C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}(1-4K)\right]$$

$$\left(\frac{C_x}{2} - \rho_{yx}C_y\right)^2 > 0 \qquad (40)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_{BT(1)}$ ก็ต่อเมื่ออสมการที่ (40) เป็นจริง

1.9 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ กับตัวประมาณ $\hat{Y}_{P}$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MMSE(\hat{Y}_{NP}) < MSE(\hat{Y}_{P})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2 C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + C_x^2(1+2K)\right]$$

$$C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \left[C_y^2 + C_x^2(1+2K)\right]$$

$$(C_x + \rho_{yx}C_y)^2 > 0 \qquad (41)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_{P}$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ ก็ต่อเมื่ออสมการที่ (41) เป็นจริง

1.10 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ และ ตัวประมาณ $\hat{Y}_{BT(2)}$ พิจารณาเงื่อนไข

$$MMSE(\hat{Y}_{NP}) < MSE(\hat{Y}_{BT(2)})$$

$$\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2 C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}(1+4K)\right]$$

$$C_y^2\left[1-\rho_{yx}^2\right] < \left[C_y^2+\frac{C_x^2}{4}(1+4K)\right]$$

$$\left(\frac{C_x}{2}+\rho_{yx}C_y\right)^2 > 0 \qquad (42)$$

จึงสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{BT(2)}$ ก็ต่อเมื่ออสมการที่ (42) เป็นจริง

2. การประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยใช้ข้อมูลจริงชุดที่ 1 จากการเก็บรวบรวมโดย Murthy (1967) เมื่อประชากรที่ใช้ในการศึกษาคือ ข้อมูลการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง จากทั้งสิ้น 80 โรงงานในเขตเมือง โดยกำหนดให้ผลผลิตสินค้าจากทั้ง 80 โรงงานเป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา y และจำนวนคนงาน เป็นตัวแปรช่วย x ข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมได้มีดังต่อไปนี้

$$N=80,\ n=30,\ \rho_{yx}=0.9413,\ \bar{X}=11.2646,\ \bar{Y}=51.8264,\ C_y=0.3542,\ C_x=0.7507$$

ในขณะที่ข้อมูลชุดที่ 2 เป็นข้อมูลเกี่ยวกับระดับโพแทสเซียมที่วัดได้จากการเผาไหม้ ซึ่งรวบรวมโดย Steel and Torrie (1960) เมื่อกำหนดให้ตัวแปรที่สนใจศึกษา y คือเวลาการเผาไหม้ (หน่วย : วินาที) และระดับโพแทสเซียมที่ถูกวัดได้จากการเผาไหม้ เป็นตัวแปรช่วย x (หน่วย : เปอร์เซ็นต์) ข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมได้จากข้อมูลชุดที่ 2 มีดังต่อไปนี้

$$N=30,\ n=6,\ \rho_{yx}=-0.4996,\ \bar{X}=0.8077,\ \bar{Y}=0.6860,\ C_y=0.7001,\ C_x=0.7493$$

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง จะพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย โดยตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องก็ต่อเมื่อ $MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP}) < MSE(\hat{\theta})$ โดยที่ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณตัวอื่น ๆ จากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าร้อยละประสิทธิภาพ (Percent Relative Efficiency: PRE) จาก

$$PRE=\frac{MSE(\hat{\theta})}{MSE(\hat{\bar{Y}}_{NP})}\times 100 \qquad (43)$$

ตารางที่ 1 ค่า MSE และ PRE ของตัวประมาณภายใต้ประชากรที่ศึกษาจากข้อมูลชุดที่ 1 และ ชุดที่ 2

ข้อมูลชุดที่ 1			ข้อมูลชุดที่ 2		
ตัวประมาณที่เกี่ยวข้อง	ตัวประมาณที่นำเสนอ	PRE	ตัวประมาณที่เกี่ยวข้อง	ตัวประมาณที่นำเสนอ	PRE
$\bar{y}$	$\hat{Y}_{NP}$	1374.8125	$\bar{y}$	$\hat{Y}_{NP}$	133.9130
$\hat{Y}_R$ และ $\hat{Y}_{SP(1)}$	$\hat{Y}_{NP}$	1318.0125	$\hat{Y}_R$ และ $\hat{Y}_{SP(1)}$	$\hat{Y}_{NP}$	430.0000
$\hat{Y}_{BT(1)}$	$\hat{Y}_{NP}$	112.3000	$\hat{Y}_{BT(1)}$	$\hat{Y}_{NP}$	243.4783
$\hat{Y}_P$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$	$\hat{Y}_{NP}$	8320.8375	$\hat{Y}_P$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$	$\hat{Y}_{NP}$	143.9130
$\hat{Y}_{BT(2)}$	$\hat{Y}_{NP}$	3613.7250	$\hat{Y}_{BT(2)}$	$\hat{Y}_{NP}$	100.4348

จากตารางที่ 1 เมื่อพิจารณาจากข้อมูลชุดที่ 1 ภายใต้สถานการณ์ที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา y กับตัวแปรช่วย x มีค่าเป็นบวก พบว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\hat{Y}_R$, $\hat{Y}_{BT(1)}$, $\hat{Y}_P$, $\hat{Y}_{BT(2)}$, $\hat{Y}_{SP(1)}$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ โดยที่ตัวประมาณ $\hat{Y}_{BT(1)}$ จะมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ มากที่สุด และมีค่า PRE เท่ากับ 112.3000 กล่าวคือ ตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_{NP}$ ประมาณ 1.123 เท่า ในขณะที่ตัวประมาณ $\hat{Y}_P$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ จัดเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ น้อยที่สุด โดยมีค่า PRE เท่ากับ 8320.8375 และสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_P$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ ประมาณ 83.208375 เท่า

เมื่อพิจารณาจากข้อมูลชุดที่ 2 ภายใต้สถานการณ์ที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา y กับตัวแปรช่วย x มีค่าเป็นลบ พบว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\hat{Y}_R$, $\hat{Y}_{BT(1)}$, $\hat{Y}_P$, $\hat{Y}_{BT(2)}$, $\hat{Y}_{SP(1)}$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ เช่นเดียวกัน โดยที่ตัวประมาณ $\hat{Y}_{BT(2)}$ จะมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ มากที่สุด โดยมีค่า PRE เท่ากับ 100.4348 กล่าวคือ ตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_{NP}$ ประมาณ 1.004348 เท่า ส่วนตัวประมาณ $\hat{Y}_R$ และ $\hat{Y}_{SP(1)}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ น้อยที่สุด เมื่อคำนวณค่า PRE ได้เท่ากับ 430.0000 และสามารถกล่าวได้ว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_R$ และ $\hat{Y}_{SP(1)}$ ประมาณ 4.3 เท่า

วิจารณ์ผลการวิจัย

จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อาทิเช่น ตัวประมาณ $\bar{y}$, $\hat{Y}_R$, $\hat{Y}_{BT(1)}$, $\hat{Y}_P$, $\hat{Y}_{BT(2)}$, $\hat{Y}_{SP(1)}$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ ในทางทฤษฎี พบว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ถ้าเงื่อนไขจากอสมการที่ (32) ถึง (41) เป็นจริง

ในขณะที่การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ในทางการคำนวณเชิงตัวเลข พบว่าค่า MSE ของตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ ที่คำนวณได้จากข้อมูลชุดที่ 1 ซึ่งเก็บรวบรวมโดย Murthy (1967) และข้อมูลชุดที่ 2 ซึ่งรวบรวมโดย Steel and Torrie (1960) มีค่าน้อยกว่าค่า MSE ของตัวประมาณตัวอื่น ๆ และเมื่อพิจารณาจากค่า PRE ที่คำนวณจากข้อมูลทั้ง 2 ชุด พบว่าตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ ให้ค่า PRE มากกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ **เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ** $\bar{y}$, $\hat{Y}_{R}$, $\hat{Y}_{BT(1)}$, $\hat{Y}_{P}$, $\hat{Y}_{BT(2)}$, $\hat{Y}_{SP(1)}$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ ทั้งในทางทฤษฎีและทางการคำนวณเชิงตัวเลข

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยได้เสนอตัวประมาณอัตราส่วนร่วมกับผลคูณแบบเลขชี้กำลังของค่าเฉลี่ยประชากร โดยพัฒนามาจากตัวประมาณของ Singh and Pal (2015) ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ผลจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อาทิเช่น เช่น ตัวประมาณ $\hat{Y}_{R}$, $\hat{Y}_{BT(1)}$, $\hat{Y}_{P}$, $\hat{Y}_{BT(2)}$, $\hat{Y}_{SP(1)}$ และ $\hat{Y}_{SP(2)}$ ทั้งในทางทฤษฎีและทางการคำนวณเชิงตัวเลขให้ผลที่สอดคล้องกัน กล่าวคือ ภายใต้สถานการณ์ที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา y กับตัวแปรช่วย x มีค่าเป็นทั้งบวกหรือลบ ตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{Y}_{NP}$ ยังคงมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ นั่นคือตัวประมาณ $\hat{Y}_{NP}$ มีประสิทธิภาพมากเพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ต่อไปในกรณีที่มีการศึกษาภายใต้สถานการณ์เดียวกันกับงานวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

Bahl, S. & Tuteja, R.K. (1991). Ratio and product type exponential estimator. *Journal of Information and Optimization Sciences*, *12*, 159-163.

Cochran, W. G. (1977). *Sampling Techniques*. (3rd ed). New York : John Wiley & Sons.

Murthy, M. N. (1967). *Sampling Theory and Methods*. India : Statistical Publishing Society. Calcutta.

Singh, H. P. & Pal, S. K. (2015). A New Chain Ratio-Ratio-Type Exponential Estimator Using Auxiliary Information in Sample Surveys. *International Journal of Mathematics And Its Applications*, *3*, 37-46.

Steel RGD, Torrie, JH. (1960). *Principles and Procedures of Statistics*. New York : Mc. Graw-Hill.