วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา ปีที่ 25 (ฉบับที่ 3) กันยายน – ธันวาคม พ.ศ. 2563
BURAPHA SCIENCE JOURNAL Volume 25 (No.3) September – December 2020 บทความวิจัย

# วิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่มเมื่อไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

# Nonparametric Bootstrap Method for Location Testing between Two Populations under Combined Assumption Violations

มนตรี สังข์ทอง*

Montri Sangthong*

*สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ*

*Division of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Suvarnabhumi*

Received : 11 December 2019

Revised : 21 January 2020

Accepted : 17 March 2020

**บทคัดย่อ**

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่ม เมื่อไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น ประกอบด้วย 4 วิธี ได้แก่ วิธี Nonparametric Bootstrap t test (NBTT), วิธี Nonparametric Bootstrap Welch t test (NBWT), วิธี Nonparametric Bootstrap Welch test based on Rank (NBWR) และ วิธี Nonparametric Bootstrap Yuen test (NBYT) โดยจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงล็อกนอร์มัล การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และการแจกแจงแกมมา ทั้งกรณีความแปรปรวนและขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน ผลการวิจัย พบว่า เมื่อประชากรมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และการแจกแจงแกมมา กรณีความแปรปรวนเท่ากัน และความแปรปรวนไม่เท่ากัน และขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \le 30$ วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด ยกเว้นเมื่อ $n_1, n_2 = 30$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน อัตราส่วน 1:4 และ 1:9 วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด สำหรับกรณีขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด

**คำสำคัญ** : วิธีบูตสแทร็ป ; การสอบไม่อิงพารามิเตอร์ ; การทดสอบตำแหน่ง

*Corresponding author. E-mail : montri.so@rmutsb.ac.th

## Abstract

This research aims to compare the efficiency of four nonparametric bootstrap methods for location testing between two populations when the preliminary assumptions are violated. The four methods include Nonparametric Bootstrap t test (NBTT), Nonparametric Bootstrap Welch t test (NBWT), Nonparametric Bootstrap Welch test based on Rank (NBWR), and Nonparametric Bootstrap Yuen Test (NBYT). The data simulation designed to have log-normal, exponential, and gamma distribution. The test includes both equal and unequal of variances and sample size. The results show that when population has log-normal, exponential, and gamma distribution with equal variance, unequal variance and sample size $n_1, n_2 \leq 30$, the NBWR method has the highest efficiency. When $n_1, n_2 = 30$ and unequal variance ratio of 1:4 and 1:9, the NBYT method has the highest efficiency. In case that the sample size $n_1, n_2 > 30$ and unequal variance, the NBYT method has the highest efficiency.

**Keywords** : bootstrap method ; nonparametric test ; location testing

**บทนำ**

การทดสอบสมมติฐานของการวิจัยเชิงปริมาณต้องอาศัยวิธีการทางสถิติเพื่อสรุปผลการวิจัยไปสู่ค่าพารามิเตอร์ของประชากร สำหรับสถิติทดสอบตำแหน่งของประชากรสองกลุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ที่ได้รับความนิยมอย่างกว้างขวางในการประยุกต์ใช้ในการทดสอบผลต่างของตำแหน่งประชากร คือ Independent sample t test (Nguyen *et al.,* 2016; Welz *et al.,* 2018) ซึ่งเป็นสถิติอิงพารามิเตอร์ โดยมีข้อตกลงเบื้องต้น คือ ประชากรทั้งสองกลุ่มมีการแจกแจงปรกติและความแปรปรวนเท่ากัน (Fagerland & Sandvik, 2009; Welz *et al.,* 2018) ถ้าความแปรปรวนต่างกันจะใช้ Welch t test (Welch, 1938) ทั้งนี้ถ้าประชากรไม่ได้มีการแจกแจงปรกติจะทดสอบสมมติฐานด้วยสถิติไม่อิงพารามิเตอร์ โดยสถิติไม่อิงพารามิเตอร์ที่ได้รับความนิยม คือ Wilcoxon-Mann-Whitney test (Fagerland & Sandvik, 2009; Neuhauser, 2012; Mickelson, 2013) ซึ่งสถิติทดสอบดังกล่าวหลายเงื่อนไขมีปัญหาเกี่ยวกับความแกร่งเมื่อความแปรปรวนของประชากรต่างกัน (Harwell *et al.,* 1992; Zimmerman & Zumbo, 1993a, 1993b; Stonehouse & Forrester, 1998) ต่อมา Yuen (1974) ได้นำเสนอ Yuen-welch test โดยอาศัยค่าเฉลี่ยแบบตัดปลาย (trimmed mean) เพื่อขจัดข้อมูลผิดปกติ จากการศึกษาของ Fagerland & Sandvik (2009) พบว่า สถิติทดสอบดังกล่าวเหมาะสมกับการวิเคราะห์ข้อมูลที่มีการแจกแจงเบ้ขวา

นอกจากนี้ได้มีการนำเสนอเทคนิควิธีบูตสแทร็ปสำหรับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับตำแหน่งโดยบูรณาการร่วมกับวิธีการทางสถิติที่มีประสิทธิภาพ โดยอาศัยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบคืนที่ (With replacement) (Efron & Tibshirani, 1993; Wilcox, 2003; Wilcox, 2005; Fagerland and Sandvik, 2009) โดยจากการศึกษาของของ Reiczigel et al. (2005) พบว่า วิธี Nonparametric Bootstrap Welch test based on Rank สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ดี เมื่อเทียบกับ Wilcoxon-Mann-Whitney test และ Welch test based on Rank และจากการศึกษาของ Dwivedi *et al.* (2017) พบว่า

Nonparametric Bootstrap t test โดยการนำตัวอย่างมารวมกัน (Pooled sample) จะเป็นวิธีการที่มีกำลังการทดสอบสูงกว่าหรือเท่ากับ Independent t test, Welch t test, Wilcoxon rank sum test และ Permutation test และสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เกือบทุกเงื่อนไข

ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจประยุกต์ใช้วิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์ร่วมกับวิธีการทางสถิติที่มีประสิทธิภาพดังกล่าวเพื่อทดสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของตำแหน่ง เนื่องจากวิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์ไม่มีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการแจกแจงของประชากร (Dwivedi *et al*., 2017) นอกจากนี้ข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติพาราเมตริกเกี่ยวกับการแจกแจงปรกติและความเท่ากันของความแปรปรวนมักถูกละเลย (Wicox, 1990; Wilcox & Keselman, 2003) โดยเฉพาะการแจกแจงแบบเบ้มักจะเกิดร่วมกับความแปรปรวนไม่เท่ากัน (Bridge & Sawilowsky, 1999 ) สำหรับวิธีการที่นำมาศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพในครั้งนี้ ประกอบด้วย วิธี Nonparametric Bootstrap t test (NBTT), วิธี Nonparametric Bootstrap Welch t test (NBWT), วิธี Nonparametric Bootstrap Welch test based on Rank (NBWR) และวิธี Nonparametric Bootstrap Yuen test (NBYT) สำหรับเกณฑ์การพิจารณาประสิทธิภาพของสถิติทดสอบพิจารณาจากความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 และกำลังการทดสอบ สำหรับความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 อาศัยเกณฑ์ของ Bradley (1978) โดยที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ถ้ามีค่า [ 0.025-0.075] ถือว่ามีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

*วิธีการทางสถิติ*

วิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่ม เมื่อไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการวิจัยนี้ ประกอบด้วย วิธี Nonparametric Bootstrap t test (NBTT), วิธี Nonparametric Bootstrap Welch t test (NBWT), วิธี Nonparametric Bootstrap Welch test based on Rank (NBWR) และ วิธี Nonparametric Bootstrap Yuen test (NBYT) มีรายละเอียด ดังนี้

*1) Nonparametric Bootstrap t test (NBTT)*

วิธี Nonparametric Bootstrap t test เป็นการประยุกต์ใช้เทคนิควิธีบูตสแทร็ปกับ Independent sample t test โดยมีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้ (Efron & Tibshirani, 1993; Dwivedi *et al.*, 2017)

(1) กำหนดให้ $X_1 = x_{11}, x_{12} ..., x_{1n_1}$ คือ ค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 1 ขนาด $n_1$ และ $X_2 = x_{21}, x_{22} ..., x_{2n_2}$ คือค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 2 ขนาด $n_2$

(2) คำนวณค่า Independent sample t test

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_P^2}{n_1} + \frac{S_P^2}{n_2}}} \quad (1)$$

เมื่อ $\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}}{n_1}$ , $\bar{X}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}}{n_2}$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$S_1^2$ คือ ความแปรปรวนของตัวอย่างกลุ่มที่ 1

$S_2^2$ คือ ความแปรปรวนของตัวอย่างกลุ่มที่ 2

(3) สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่ ขนาด $n_1^*$ และ $n_2^*$ จากตัวอย่างที่นำมารวมกัน (pooled sample) ขนาด $n_1 + n_2$ ทั้งนี้ $n_1^*$ และ $n_2^*$ มีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ $n_1$ และ $n_2$ ตามลำดับ

(4) คำนวณค่า $t^*$

$$t^* = \frac{\bar{X}_1^* - \bar{X}_2^*}{\sqrt{\frac{S_P^{2*}}{n_1^*} + \frac{S_P^{2*}}{n_2^*}}} \tag{2}$$

เมื่อ $\bar{X}_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1^*} x_{1i}^*}{n_1^*}$ , $\bar{X}_2^* = \frac{\sum_{j=1}^{n_2^*} x_{2j}^*}{n_2^*}$

$x_{1i}^*, x_{2j}^*$ คือค่าสังเกตของตัวอย่างกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ที่สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่จากตัวอย่างขนาด $n_1 + n_2$

$$S_p^{2*} = \frac{(n_1^*-1)S_1^{2*} + (n_2^*-1)S_2^{2*}}{n_1^*+n_2^*-2}$$

$S_1^{2*}$ คือความแปรปรวนของตัวอย่างกลุ่มที่ 1 สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่จากตัวอย่างขนาด $n_1 + n_2$

$S_2^{2*}$ คือความแปรปรวนของตัวอย่างกลุ่มที่ 2 สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่จากตัวอย่างขนาด $n_1 + n_2$

(5) ทำซ้ำขั้นที่ 3 และขั้นที่ 4 จำนวน B รอบ (กำหนด B = 1,000 รอบ)

(6) คำนวณค่า P-value $= \dfrac{\text{number of times}\left(\left|t^*\right| \geq \left|t\right|\right)}{B}$ (3)

*2) Nonparametric Bootstrap Welch t test (NBWT)*

วิธี Nonparametric Bootstrap Welch t test เป็นการประยุกต์ใช้เทคนิควิธีบูตสแทร็ปกับ Welch t test โดยมีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้ (Efron & Tibshirani, 1993; Dwivedi *et al*., 2017)

(1) กำหนดให้ $X_1 = x_{11}, x_{12} ..., x_{1n_1}$ คือ ค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 1 ขนาด $n_1$ และ $X_2 = x_{21}, x_{22} ..., x_{2n_2}$ คือ ค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 2 ขนาด $n_2$

(2) คำนวณค่า Welch t test

$$\text{Welch} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \tag{4}$$

เมื่อ $\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}}{n_1}$ , $\bar{X}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}}{n_2}$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_{1i} - \bar{X}_1\right)}{n_1 - 1} \text{ , } S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(x_{2j} - \bar{X}_2\right)}{n_2 - 1}$$

(3) สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่ ขนาด $n_1^*$ และ $n_2^*$ จากตัวอย่างที่นำมารวมกัน (pooled sample) ขนาด $n_1 + n_2$ ทั้งนี้ $n_1^*$ และ $n_2^*$ มีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ $n_1$ และ $n_2$ ตามลำดับ

(4) คำนวณค่า $\text{Welch}^*$

$$\text{Welch}^* = \frac{\bar{X}_1^* - \bar{X}_2^*}{\sqrt{\frac{S_1^{2*}}{n_1^*} + \frac{S_2^{2*}}{n_2^*}}} \tag{5}$$

เมื่อ $\bar{X}_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1^*} x_{1i}^*}{n_1^*}$ , $\bar{X}_2^* = \frac{\sum_{j=1}^{n_2^*} x_{2j}^*}{n_2^*}$

$x_{1i}^*, x_{2j}^*$ คือค่าสังเกตของตัวอย่างกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ที่สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่จากตัวอย่างขนาด $n_1 + n_2$

$$S_1^{2*} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1^*}\left(x_{1i}^* - \bar{X}_1^*\right)}{n_1^* - 1} \text{ , } S_2^{2*} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2^*}\left(x_{2j}^* - \bar{X}_2^*\right)}{n_2^* - 1}$$

(5) ทำซ้ำขั้นที่ 3 และขั้นที่ 4 จำนวน B รอบ (กำหนด B = 1,000 รอบ)

(6) คำนวณค่า P-value $= \frac{\text{number of times}\left(\left|\text{Welch}^*\right| \geq \left|\text{Welch}\right|\right)}{B}$ (6)

*3) Nonparametric Bootstrap Welch test based on Rank (NBWR)*

วิธี Nonparametric bootstrap welch t test based on rank เป็นการประยุกต์ใช้เทคนิควิธีบูตสแทร็ปกับ Welch t test โดยนำข้อมูลจากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 มาเรียงอันดับรวมกันจากน้อยไปหามาก ทั้งนี้ถ้ามีค่าสังเกตซ้ำกันจะหาค่าเฉลี่ยอันดับ โดยมีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้ (Efron & Tibshirani, 1993; Reiczigel *et al*., 2005)

(1) กำหนดให้ $X_1 = x_{11}, x_{12}..., x_{1n_1}$ คือ ค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 1 ขนาด $n_1$ และ $X_2 = x_{21}, x_{22}..., x_{2n_2}$ คือ ค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 2 ขนาด $n_2$

(2) นำตัวอย่างรวมกัน (pooled sample) จะได้ตัวอย่างขนาด $n_1 + n_2$ และเรียงอันดับค่าสังเกตจากน้อยไปหามาก โดยกำหนดให้ $r_{1i}$ คือ อันดับของค่าสังเกตที่ i จากตัวอย่างที่ 1 และ $r_{2j}$ คือ อันดับของค่าสังเกตที่ j จากตัวอย่างที่ 2 ถ้ามีค่าสังเกตซ้ำกันจะหาค่าเฉลี่ยอันดับร่วมกัน

(3) คำนวณค่า $$\mathrm{WBR} = \frac{\bar{R}_1 - \bar{R}_2}{\sqrt{\frac{S_{R_1}^2}{n_1} + \frac{S_{R_2}^2}{n_2}}} \tag{7}$$

เมื่อ $$\bar{R}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} r_{1i}}{n_1}, \quad \bar{R}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} r_{2j}}{n_2}$$

$$S_{R_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(r_{1i} - \bar{R}_1\right)}{n_1 - 1}, \quad S_{R_2}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(r_{2j} - \bar{R}_2\right)}{n_2 - 1}$$

(4) สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่ ขนาด $n_1^*$ และ $n_2^*$ จากตัวอย่างขนาด $n_1 + n_2$ เรียงอันดับจากน้อยไปหามาก ถ้ามีค่าสังเกตซ้ำกันจะหาค่าเฉลี่ยอันดับร่วมกัน ทั้งนี้ $n_1^*$ และ $n_2^*$ มีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ $n_1$ และ $n_2$ ตามลำดับ

(5) คำนวณค่า $$\mathrm{WBR}^* = \frac{\bar{R}_1^* - \bar{R}_2^*}{\sqrt{\frac{S_{R_1}^{2*}}{n_1^*} + \frac{S_{R_2}^{2*}}{n_2^*}}} \tag{8}$$

เมื่อ $$\bar{R}_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} r_{1i}^*}{n_1^*}, \quad \bar{R}_2^* = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} r_{2j}^*}{n_2^*}$$

$$S_{R_1}^{2*} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(r_{1i}^* - \bar{R}_1^*\right)}{n_1^* - 1}, \quad S_{R_2}^{2*} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2^*}\left(r_{2j}^* - \bar{R}_2^*\right)}{n_2^* - 1}$$

(6) ทำซ้ำขั้นที่ 4 และขั้นที่ 5 จำนวน B รอบ (กำหนด B = 1,000 รอบ)

(7) คำนวณค่า P-value $= \dfrac{\text{number of times}\left(\left|WBR^*\right| \geq \left|WBR\right|\right)}{B}$ (9)

*4) Nonparametric Bootstrap Yuen test (NBYT)*

วิธี Nonparametric Bootstrap Yuen test เป็นการประยุกต์ใช้เทคนิควิธีบูตสแทร็ปกับ Yuen-Welch test โดยมีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้ (Yuen, 1974; Efron & Tibshirani, 1993; Wilcox, 2005)

(1) กำหนดให้ $X_1 = x_{11}, x_{12} ..., x_{1n_1}$ คือ ค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 1 ขนาด $n_1$ และ $X_2 = x_{21}, x_{22} ..., x_{2n_2}$ คือ ค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 2 ขนาด $n_2$

(2) เรียงอันดับค่าสังเกตแต่ละกลุ่มของตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 จากน้อยไปหามาก และตัดค่าสังเกตปลายหางด้านน้อยและด้านมากออกด้านละ 20% หรือ $\gamma = 0.20$ เนื่องจากมีประสิทธิภาพดีที่สุด (Wilcox, 1994; Wilcox, 2005) โดยกำหนดจำนวนค่าสังเกตที่ตัดออก แทนด้วย $h_1 = n_1 - 2\gamma n_1$ และ $h_2 = n_2 - 2\gamma n_2$ สำหรับการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานบนรากฐานของความแปรปรวนวินเซอร์ไรซ์ (winsorized variance) กำหนดให้ $W_1 = w_{11}, w_{12}, ..., w_{1n_1}$ และ $W_2 = w_{21}, w_{22}, ..., w_{2n_2}$ ทั้งนี้ $W_1, W_2$ คือ จำนวนข้อมูลที่ถูกตัดค่าสังเกตปลายหางด้านน้อยและด้านมากออกด้านละ 20% และแทนคืนเท่าจำนวนที่ตัดออกไปด้วยค่าสังเกตที่น้อยที่สุดหรือมากที่สุดที่ไม่ถูกตัดออกไป

(3) คำนวณค่า $YW = \dfrac{\bar{X}_{\gamma 1} - \bar{X}_{\gamma 2}}{\sqrt{d_1 + d_2}}$ (10)

เมื่อ $$\bar{X}_{\gamma 1} = \frac{\sum_{i=1}^{h_1} x_{1i}}{h_1}, \ \bar{X}_{\gamma 2} = \frac{\sum_{j=1}^{h_2} x_{2j}}{h_2}$$

$$d_1 = \frac{SW_1^2(n_1 - 1)}{h_1(h_1 - 1)}, \ d_2 = \frac{SW_2^2(n_2 - 1)}{h_2(h_2 - 1)}$$

$$SW_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(w_{1i} - \bar{W}_1\right)}{n_1 - 1}, \ SW_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(w_{1j} - \bar{W}_2\right)}{n_2 - 1}$$

(4) สุ่มตัวอย่างแบบคืนที่ ขนาด $n_1^*$ และ $n_2^*$ จากตัวอย่างที่นำมารวมกัน (pooled sample) ขนาด $n_1 + n_2$ ทั้งนี้ $n_1^*$ และ $n_2^*$ มีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ $n_1$ และ $n_2$ ตามลำดับ

(5) คำนวณค่า $YW^*$

$$YW^* = \frac{\bar{X}_{\gamma 1}^* - \bar{X}_{\gamma 2}^*}{\sqrt{d_1^* + d_2^*}} \quad (11)$$

เมื่อ $\bar{X}^*_{\gamma 1} = \frac{\sum_{i=1}^{h_1} x^*_{1i}}{h_1}$ , $\bar{X}^*_{\gamma 2} = \frac{\sum_{j=1}^{h_2} x^*_{2j}}{h_2}$

$$d^*_1 = \frac{SW_1^{2*}\left(n^*_1 - 1\right)}{h_1\left(h_1 - 1\right)},\ d^*_2 = \frac{SW_2^{2*}\left(n^*_2 - 1\right)}{h_2\left(h_2 - 1\right)}$$

$$SW_1^{2*} = \frac{\sum_{i=1}^{n^*_1}\left(w^*_{1i} - \bar{W}^*_1\right)}{n^*_1 - 1},\ SW_2^{2*} = \frac{\sum_{j=1}^{n^*_2}\left(w^*_{2j} - \bar{W}^*_2\right)}{n^*_2 - 1}$$

(6) ทำซ้ำขั้นที่ 4 และขั้นที่ 5 จำนวน B รอบ (กำหนด B = 1,000 รอบ)

(7) คำนวณค่า P-value = $\frac{\text{number of times}\left(\left|YW^*\right| \geq \left|YW\right|\right)}{B}$ (12)

## วิธีดำเนินการวิจัย

วิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่มเมื่อไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น จำลองข้อมูลด้วยโปรแกรม R Version 3.5.2 มีรายละเอียด ดังนี้

1. จำลองข้อมูลให้ประชากรทั้งสองกลุ่มมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล (Log-normal distribution) การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential distribution) และการแจกแจงแกมมา (Gamma distribution) มีรายละเอียดดังนี้

1) การแจกแจงล็อกนอร์มอล

$$X_1 \sim \log \text{Norm}(\mu = 0, \sigma^2 = 1) - 1 \tag{13}$$

$$X_2 \sim \sigma_2.(\log \text{Norm}(\mu = 0, \sigma^2 = 1) - 1 - \text{shift}) \tag{14}$$

2) การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

$$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda = 2) - \frac{\ln(2)}{2} \tag{15}$$

$$X_2 \sim \sigma_Y.(\text{Exp}(\lambda = 2) - \frac{\text{In}(2)}{2} - \text{shift}) \tag{16}$$

3) การแจกแจงแกมมา

$$X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha = 1, \beta = 2) - 1.385 \tag{17}$$

$$X_2 \sim \sigma_2.(\mathrm{Gamma}(\alpha=1,\beta=2)-1.385-\mathrm{shift}) \quad (18)$$

การจำลองแบบปัญหาดังกล่าว ถ้ากำหนดให้ shift = 0 แสดงว่า มัธยฐานเท่ากัน เป็นการคำนวณความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ถ้ากำหนด $\mathrm{shift} \neq 0$ แสดงว่า มัธยฐานต่างกัน เป็นการคำนวณกำลังการทดสอบ โดยการคำนวณกำลังการทดสอบ กำหนดค่า shift = 1, ln(2)/2, และ 1.385 เมื่อจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงล็อกนอร์มัล การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และการแจกแจงแกมมา ตามลำดับ

2. กำหนดอัตราส่วนของความแปรปรวน 4 ขนาด ทั้งความแปรปรวนเท่ากันและไม่เท่ากัน คือ 1:1, 1:2.25, 1:4, และ 1:9

3. กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากันและต่างกัน ประกอบด้วย 7 ขนาด $(n_1, n_2)$ คือ (10,10), (10,30), (30,10), (30,30), (50,100), (100,50), และ (100,100)

4. การคำนวณความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 โดยกำหนดอัตราส่วนค่ามัธยฐานเท่ากัน เนื่องจากเป็นการจำลองข้อมูลภายใต้การแจกแจงเบ้ขวา ดังนั้น มัธยฐานเป็นตัวแทนของค่าตำแหน่งที่เหมาะสมที่สุด โดยหาสัดส่วนจำนวนการปฏิเสธ $H_0$ ต่อจำนวนการทำซ้ำ คือ 10,000 รอบในแต่ละเงื่อนไข ทั้งนี้ทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ถ้าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 อยู่ระหว่าง [0.025-0.075] ถือว่าสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ ตามเกณฑ์ของ Bradley (1978)

5. การคำนวณกำลังการทดสอบ กำหนดมัธยฐานต่างกัน โดยหาสัดส่วนจำนวนการปฏิเสธ $H_0$ ต่อจำนวนการทำซ้ำ คือ 10,000 รอบในแต่ละเงื่อนไข ทั้งนี้ทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

**ผลการวิจัย**

วิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่มเมื่อไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นมีรายละเอียดผลการวิจัย จากตารางที่ 1 พบว่า ประชากรมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล วิธี NBYT สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้สูงสุด ประมาณร้อยละ 88.46 ของเงื่อนไขทั้งหมด สำหรับวิธี NBTT วิธี NBWT และวิธี NBWR สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ใกล้เคียงกันประมาณร้อยละ 53.85 – 57.69 ของเงื่อนไขทั้งหมด โดยวิธี NBTT วิธี NBWT และวิธี NBWR ส่วนใหญ่ควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ เมื่อขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \leq 30$ สำหรับขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ ส่วนใหญ่สามารถควบคุมได้เฉพาะความแปรปรวนเท่ากัน เมื่อพิจารณากำลังการทดสอบภายใต้สถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \leq 30$ ทั้งความแปรปรวนเท่ากัน และไม่เท่ากัน วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 = 10$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน อัตราส่วน 1:4 ขนาดตัวอย่าง $n_1 = 30, n_2 = 10$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน อัตราส่วน 1:2.25 และขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 = 30$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน อัตราส่วน 1:4 และ 1:9 วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด สำหรับกรณีขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ และความแปรปรวนเท่ากัน วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด กรณีความแปรปรวนไม่เท่ากัน วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด

***ตารางที่ 1*** ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 และกำลังการทดสอบ (ระดับนัยสำคัญ 0.05) ของวิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่มที่มีการแจกแจงล็อกนอร์มัล จำแนกตามขนาดตัวอย่างและความแปรปรวน

| Sample Size | Var.ratio | NBTT | | NBWT | | NBWR | | NBYT | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | TE | PT | TE | PT | TE | PT | TE | PT |
| 10:10 | 1:1 | *0.0431* | 0.3301 | 0.0182 | 0.2277 | *0.0493* | **0.5267** | *0.0473* | 0.4485 |
| | 1:2.25 | *0.0471* | 0.3579 | 0.0213 | 0.2805 | *0.0569* | **0.5675** | *0.0548* | 0.5365 |
| | 1:4 | *0.0474* | 0.3770 | 0.0230 | 0.3109 | *0.0633* | 0.5736 | *0.0589* | **0.5749** |
| | 1:9 | *0.0601* | 0.3561 | *0.0270* | 0.2887 | *0.0730* | **0.5562** | 0.0793 | 0.5897 |
| 10:30 | 1:1 | *0.0486* | 0.2545 | *0.0514* | 0.2119 | *0.0532* | **0.8796** | *0.0531* | 0.5769 |
| | 1:2.25 | *0.0567* | 0.3163 | *0.0604* | 0.2926 | *0.0548* | **0.9212** | *0.0397* | 0.7326 |
| | 1:4 | *0.0658* | 0.3373 | *0.0670* | 0.3231 | *0.0657* | **0.9359** | *0.0309* | 0.7976 |
| | 1:9 | 0.0805 | 0.3577 | 0.0780 | 0.3402 | *0.0745* | **0.9411** | *0.0340* | 0.8289 |
| 30:10 | 1:1 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | 1:2.25 | *0.0401* | 0.4308 | *0.0425* | 0.3899 | *0.0603* | 0.5792 | *0.0623* | **0.5926** |
| | 1:4 | *0.0411* | 0.4300 | *0.0410* | 0.3654 | *0.0698* | **0.5773** | 0.0768 | 0.6214 |
| | 1:9 | *0.0426* | 0.4018 | *0.0362* | 0.3218 | *0.0718* | **0.5576** | 0.0840 | 0.6254 |
| 30:30 | 1:1 | *0.0430* | 0.5652 | 0.0247 | 0.4937 | *0.0533* | **0.9515** | *0.0528* | 0.8566 |
| | 1:2.25 | *0.0631* | 0.5306 | *0.0323* | 0.4848 | *0.0665* | **0.9568** | *0.0529* | 0.8768 |
| | 1:4 | 0.0845 | 0.5044 | *0.0400* | 0.4495 | 0.0830 | 0.9645 | *0.0590* | **0.8945** |
| | 1:9 | 0.1476 | 0.4595 | *0.0636* | 0.3904 | 0.0900 | 0.9554 | *0.0626* | **0.8946** |
| 50:100 | 1:1 | *0.0495* | 0.8206 | *0.0444* | 0.7779 | *0.0504* | **1.0000** | *0.0511* | 0.9976 |
| | 1:2.25 | 0.1254 | 0.7649 | 0.1130 | 0.7369 | 0.0904 | 1.0000 | *0.0539* | **0.9993** |
| | 1:4 | 0.2395 | 0.7523 | 0.2149 | 0.7289 | 0.1326 | 1.0000 | *0.0630* | **0.9995** |
| | 1:9 | 0.4463 | 0.6836 | 0.3837 | 0.6492 | 0.1587 | 1.0000 | *0.0671* | **0.9998** |
| 100:50 | 1:1 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | 1:2.25 | *0.0599* | 0.6742 | *0.0410* | 0.6255 | 0.0754 | 0.9977 | *0.0533* | **0.9848** |
| | 1:4 | 0.1063 | 0.6224 | *0.0672* | 0.5644 | 0.0999 | 0.9975 | *0.0570* | **0.9813** |
| | 1:9 | 0.2004 | 0.5789 | 0.1241 | 0.5059 | 0.1108 | 0.9964 | *0.0631* | **0.9840** |
| 100:100 | 1:1 | *0.0479* | 0.8999 | *0.0384* | 0.8754 | *0.0498* | **1.0000** | *0.0477* | 0.9998 |
| | 1:2.25 | 0.1283 | 0.8361 | 0.0959 | 0.8044 | 0.0973 | 1.0000 | *0.0541* | **0.9998** |
| | 1:4 | 0.2461 | 0.7502 | 0.1836 | 0.7070 | 0.1529 | 1.0000 | *0.0629* | **1.0000** |
| | 1:9 | 0.5440 | 0.7227 | 0.4064 | 0.6648 | 0.1636 | 0.9999 | *0.0723* | **0.9999** |

TE คือ ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1, PE คือ กำลังการทดสอบ, - คือ เงื่อนไขเดียวกัน (อัตราส่วนความแปรปรวนเท่ากัน)

ตัวเอียง คือ สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้, ตัวเข้ม คือ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้

***ตารางที่ 2*** ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 และกำลังการทดสอบ (ระดับนัยสำคัญ 0.05) ของวิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่มที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง จำแนกตามขนาดตัวอย่างและความแปรปรวน

| Sample Size | Var.ratio | NBTT | | NBWT | | NBWR | | NBYT | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | TE | PT | TE | PT | TE | PT | TE | PT |
| 10:10 | 1:1 | *0.0484* | 0.3841 | *0.0277* | 0.3119 | *0.0472* | **0.4982** | *0.0484* | 0.3955 |
| | 1:2.25 | *0.0496* | 0.4193 | *0.0289* | 0.3766 | *0.0544* | **0.5475** | *0.0528* | 0.5082 |
| | 1:4 | *0.0583* | 0.4252 | *0.0387* | 0.3722 | *0.0680* | **0.5489** | *0.0693* | 0.5327 |
| | 1:9 | *0.0675* | 0.4260 | *0.0401* | 0.3439 | *0.0719* | **0.5491** | 0.0826 | 0.5751 |
| 10:30 | 1:1 | *0.0497* | 0.4094 | *0.0627* | 0.3685 | *0.0510* | **0.8170** | *0.0504* | 0.5009 |
| | 1:2.25 | *0.0551* | 0.5213 | *0.0726* | 0.5180 | *0.0556* | **0.9024** | *0.0376* | 0.6945 |
| | 1:4 | *0.0632* | 0.5784 | 0.0838 | 0.5926 | *0.0648* | **0.9222** | *0.0350* | 0.7783 |
| | 1:9 | 0.0905 | 0.6057 | 0.1143 | 0.6074 | *0.0708* | **0.9250** | *0.0340* | 0.8254 |
| 30:10 | 1:1 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | 1:2.25 | *0.0534* | 0.4719 | *0.0567* | 0.4133 | *0.0651* | **0.5507** | *0.0698* | 0.5488 |
| | 1:4 | *0.0483* | 0.4768 | *0.0451* | 0.3904 | *0.0681* | **0.5612** | 0.0756 | 0.5789 |
| | 1:9 | *0.0453* | 0.4548 | *0.0372* | 0.3419 | *0.0667* | **0.5442** | 0.0818 | 0.5994 |
| 30:30 | 1:1 | *0.0528* | 0.7754 | *0.0441* | 0.7608 | *0.0549* | **0.9398** | *0.0535* | 0.8384 |
| | 1:2.25 | *0.0627* | 0.7534 | *0.0480* | 0.7267 | *0.0666* | **0.9485** | *0.0498* | 0.8779 |
| | 1:4 | 0.0862 | 0.7406 | *0.0645* | 0.7005 | 0.0806 | 0.9539 | *0.0574* | **0.8991** |
| | 1:9 | 0.1433 | 0.7094 | 0.0997 | 0.6510 | 0.0824 | 0.9437 | *0.0618* | **0.9010** |
| 50:100 | 1:1 | *0.0530* | 0.9870 | *0.0512* | 0.9871 | *0.0507* | **0.9999** | *0.0496* | 0.9971 |
| | 1:2.25 | 0.1133 | 0.9887 | 0.1174 | 0.9889 | 0.0843 | 1.0000 | *0.0495* | **0.9993** |
| | 1:4 | 0.2368 | 0.9846 | 0.2400 | 0.9838 | 0.1160 | 0.9999 | *0.0550* | **0.9993** |
| | 1:9 | 0.4550 | 0.9766 | 0.4521 | 0.9726 | 0.1195 | 1.0000 | *0.0643* | **0.9998** |
| 100:50 | 1:1 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | 1:2.25 | *0.0749* | 0.9262 | *0.0663* | 0.9128 | 0.0768 | 0.9970 | *0.0514* | **0.9845** |
| | 1:4 | 0.1233 | 0.8962 | 0.1055 | 0.8689 | 0.0973 | 0.9959 | *0.0596* | **0.9861** |
| | 1:9 | 0.2328 | 0.8668 | 0.1971 | 0.8292 | 0.0877 | 0.9946 | *0.0576* | **0.9886** |
| 100:100 | 1:1 | *0.0515* | 0.9976 | *0.0504* | 0.9979 | *0.0525* | **1.0000** | *0.0522* | 0.9996 |
| | 1:2.25 | 0.1202 | 0.9938 | 0.1144 | 0.9929 | 0.0987 | 1.0000 | *0.0532* | **0.9999** |
| | 1:4 | 0.2627 | 0.9930 | 0.2477 | 0.9913 | 0.1145 | 1.0000 | *0.0585* | **0.9999** |
| | 1:9 | 0.4797 | 0.9854 | 0.4496 | 0.9815 | 0.1381 | 1.0000 | *0.0685* | **0.9998** |

TE คือ ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1, PE คือ กำลังการทดสอบ, - คือ เงื่อนไขเดียวกัน (อัตราส่วนความแปรปรวนเท่ากัน)

ตัวเอียง คือ สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้, ตัวเข้ม คือ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้

จากตารางที่ 2 พบว่า ประชากรมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง วิธี NBYT สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้สูงสุด ประมาณร้อยละ 88.46 ของเงื่อนไขทั้งหมด สำหรับวิธี NBTT วิธี NBWT และวิธี NBWR สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ประมาณร้อยละ 57.69 ของเงื่อนไขทั้งหมด โดยส่วนใหญ่ควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ เมื่อขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \leq 30$ สำหรับขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ ส่วนใหญ่สามารถควบคุมได้เฉพาะความแปรปรวนเท่ากัน เมื่อพิจารณากำลังการทดสอบภายใต้สถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ พบว่า กรณีความแปรปรวนเท่ากัน และความแปรปรวนไม่เท่ากัน และขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \leq 30$ วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด ยกเว้นเมื่อ $n_1, n_2 = 30$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน อัตราส่วน 1:4 และ 1:9 วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด สำหรับกรณีขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ และความแปรปรวนเท่ากัน วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด กรณีความแปรปรวนไม่เท่ากัน วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด และจากตารางที่ 3 พบว่า ประชากรมีการแจกแจงแกมมา วิธี NBYT สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้สูงสุด ประมาณร้อยละ 88.46 ของเงื่อนไขทั้งหมด สำหรับวิธี NBTT วิธี NBWT และวิธี NBWR สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ใกล้เคียงกันประมาณร้อยละ 53.85 – 57.69 ของเงื่อนไขทั้งหมด โดยส่วนใหญ่ควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 เมื่อขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \leq 30$ สำหรับขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ พบว่า วิธี NBTT วิธี NBWT และวิธี NBWR ส่วนใหญ่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เฉพาะความแปรปรวนเท่ากัน สำหรับวิธี NBYT สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ ทั้งความแปรปรวนเท่ากันและไม่เท่ากัน เมื่อพิจารณากำลังการทดสอบภายใต้สถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ พบว่า กรณีความแปรปรวนเท่ากัน และความแปรปรวนไม่เท่ากัน ขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \leq 30$ วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด ยกเว้นเมื่อ $n_1, n_2 = 30$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน อัตราส่วน 1:4 และ 1:9 วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด สำหรับกรณีขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ และความแปรปรวนเท่ากัน วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด กรณีความแปรปรวนไม่เท่ากัน วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด

***ตารางที่ 3*** ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 และกำลังการทดสอบ (ระดับนัยสำคัญ 0.05) ของวิธีบูตสแทร็ปไม่อิงพารามิเตอร์เพื่อทดสอบตำแหน่งระหว่างประชากรสองกลุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา จำแนกตามขนาดตัวอย่างและความแปรปรวน

| Sample Size | Var.ratio | NBTT | | NBWT | | NBWR | | NBYT | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | TE | PT | TE | PT | TE | PT | TE | PT |
| 10:10 | 1:1 | *0.0466* | 0.3903 | *0.0281* | 0.3229 | *0.0496* | **0.4997** | *0.0501* | 0.4020 |
| | 1:2.25 | *0.0534* | 0.4102 | *0.0333* | 0.3607 | *0.0595* | **0.5365** | *0.0581* | 0.4955 |
| | 1:4 | *0.0600* | 0.4144 | *0.0388* | 0.3650 | *0.0707* | **0.5516** | *0.0716* | 0.5425 |
| | 1:9 | *0.0659* | 0.4136 | *0.0354* | 0.3373 | *0.0744* | **0.5393** | 0.0820 | 0.5685 |
| 10:30 | 1:1 | *0.0517* | 0.4104 | *0.0638* | 0.3713 | *0.0515* | **0.8259** | *0.0475* | 0.5020 |
| | 1:2.25 | *0.0574* | 0.5303 | 0.0778 | 0.5282 | *0.0549* | **0.8987** | *0.0401* | 0.6929 |
| | 1:4 | *0.0678* | 0.5662 | 0.0901 | 0.5780 | *0.0593* | **0.9171** | *0.0335* | 0.7649 |
| | 1:9 | 0.0896 | 0.5930 | 0.1142 | 0.5998 | *0.0718* | **0.9245** | *0.0350* | 0.8221 |
| 30:10 | 1:1 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | 1:2.25 | *0.0469* | 0.4892 | *0.0494* | 0.4300 | *0.0566* | **0.5674** | *0.0625* | 0.5598 |
| | 1:4 | *0.0478* | 0.4697 | *0.0450* | 0.3799 | *0.0643* | **0.5501** | 0.0767 | 0.5703 |
| | 1:9 | *0.0499* | 0.4230 | *0.0414* | 0.3224 | *0.0698* | **0.5099** | 0.0865 | 0.5617 |
| 30:30 | 1:1 | *0.0480* | 0.7559 | *0.0391* | 0.7425 | *0.0481* | **0.9349** | *0.0495* | 0.8307 |
| | 1:2.25 | *0.0665* | 0.7456 | *0.0545* | 0.7150 | *0.0708* | **0.9507** | *0.0610* | 0.8775 |
| | 1:4 | 0.0874 | 0.7204 | *0.0631* | 0.6796 | 0.0810 | 0.9503 | *0.0584* | **0.8898** |
| | 1:9 | 0.1539 | 0.6888 | 0.1078 | 0.6213 | 0.0830 | 0.9428 | *0.0692* | **0.8967** |
| 50:100 | 1:1 | *0.0516* | 0.9837 | *0.0508* | 0.9836 | *0.0510* | **0.9998** | *0.0515* | 0.9954 |
| | 1:2.25 | 0.1179 | 0.9882 | 0.1223 | 0.9883 | 0.0918 | 0.9999 | *0.0515* | **0.9995** |
| | 1:4 | 0.2330 | 0.9844 | 0.2381 | 0.9838 | 0.1085 | 0.9999 | *0.0568* | **0.9998** |
| | 1:9 | 0.4177 | 0.9779 | 0.4123 | 0.9753 | 0.1372 | 1.000 | *0.0612* | **1.0000** |
| 100:50 | 1:1 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | 1:2.25 | *0.0722* | 0.9224 | *0.0634* | 0.9029 | 0.0771 | 0.9972 | *0.0527* | **0.9839** |
| | 1:4 | 0.1332 | 0.9049 | 0.1123 | 0.8798 | 0.0839 | 0.9981 | *0.0584* | **0.9865** |
| | 1:9 | 0.2321 | 0.8606 | 0.1943 | 0.8249 | 0.0895 | 0.9956 | *0.0609* | **0.9870** |
| 100:100 | 1:1 | *0.0527* | 0.9974 | *0.0499* | 0.9963 | *0.0573* | **1.0000** | *0.0528* | 0.9994 |
| | 1:2.25 | 0.1374 | 0.9940 | 0.1330 | 0.9929 | 0.0925 | 1.0000 | *0.0583* | **1.0000** |
| | 1:4 | 0.2614 | 0.9925 | 0.2456 | 0.9910 | 0.1196 | 1.0000 | *0.0569* | **0.9999** |
| | 1:9 | 0.5052 | 0.9821 | 0.4778 | 0.9783 | 0.1128 | 1.0000 | *0.0737* | **1.0000** |

TE คือ ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1, PE คือ กำลังการทดสอบ, - คือ เงื่อนไขเดียวกัน (อัตราส่วนความแปรปรวนเท่ากัน)

ตัวเอียง คือ สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้, ตัวเข้ม คือ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้

## วิจารณ์ผลการวิจัย

จากผลการวิจัยเมื่อประชากรมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และการแจกแจงแกมมา ซึ่งเป็นการแจกแจงเบ้ขวา เมื่อขนาดตัวอย่างทั้งสองกลุ่มไม่เกิน 30 ตัวอย่าง พบว่า วิธี NBWR สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เกือบทุกเงื่อนไข ใกล้เคียงกับวิธี NBYT แต่วิธี NBWR มีกำลังการทดสอบที่สูงกว่า ทั้งนี้อาจเนื่องมากจากเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กวิธี NBYT ได้รับผลกระทบจากตัวอย่างข้อมูลส่วนปลายที่ถูกตัดออกไป จึงส่งผลให้วิธี NBWR มีประสิทธิภาพดีกว่า นอกจากนี้กรณีขนาดตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมากกว่า 30 ตัวอย่าง และความแปรปรวนเท่ากัน พบว่า วิธี NBWR มีประสิทธิภาพดีกว่าทุกสถิติทดสอบ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Reiczigel *et al.* (2005) พบว่า วิธี NBWR สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ดีและมีกำลังการทดสอบที่ดีกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับการทดสอบ Wilcoxon-Mann-Whitney (WMW)

สำหรับกรณีขนาดตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมากกว่า 30 ตัวอย่าง และความแปรปรวนไม่เท่ากัน พบว่า วิธี NBYT สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ดีกว่าทุกสถิติทดสอบ และสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี เมื่อความแปรปรวนไม่เท่ากัน ความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ลดลงอย่างชัดเจน เมื่อพิจารณาจากตารางที่ 1 ขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 = 100$ และอัตราส่วนความแปรปรวน เท่ากับ 1:9 พบว่า วิธี NBTT มีความผิดพลาดแบบที่ 1 สูงสุด ประมาณ 54.40% และจากตารางที่ 3 ขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 = 100$ และอัตราส่วนความแปรปรวน เท่ากับ 1:9 พบว่าวิธี NBWT มีความผิดพลาดแบบที่ 1 สูงสุด ประมาณ 47.78% ตามลำดับ ซึ่งบางประเด็นแตกต่างกับงานวิจัยของ Dwivedi *et al.* (2017) พบว่า วิธี NBTT มีกำลังการทดสอบสูงกว่าหรือเท่ากับ Independent t test, Welch t test, Wilcoxon rank sum test และ Permutation test และสามารถควคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ ทั้งนี้เนื่องมาจากการทดสอบตำแหน่ง (Location testing) ดังกล่าวกำหนดความแตกต่างของค่าพารามิเตอร์ คือ ค่าเฉลี่ย สำหรับการวิจัยครั้งนี้กำหนดค่ามัธยฐานเนื่องจากข้อมูลมีการแจกแจงเบ้ขวา ดังนั้นการทดสอบผลต่างดังกล่าวด้วยมัธยฐานจึงมีความเหมาะสมตามแนวคิดการจำลองแบบปัญหาของ Fagerland & Sandvik (2009) และ Welz *et al.* (2018)

สำหรับกรณีวิธี NBYT มีประสิทธิภาพที่สูงสุดเมื่อตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมากกว่า 30 ตัวอย่าง เนื่องจากรากฐานวิธีดังกล่าวใช้ค่าเฉลี่ยแบบตัดปลาย (trimmed mean) ร้อยละ 20 ทำให้ข้อมูลที่ผิดปรกติ (outlier) ถูกขจัดออกไป รวมถึงตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอแม้ว่าตัวอย่างจะถูกตัดออกไปบางส่วนส่งผลให้ค่าเฉลี่ยตัดปลายมีค่าใกล้เคียงมัธยฐานมากกว่าค่าเฉลี่ย (Fagerland & Sandvik, 2009) นอกจากนั้นเมื่อบูรณาการกับวิธีบูตสแตร็ปแบบใช้ตัวอย่างรวมกัน (pooled sample) จึงทำให้มีประสิทธิภาพอย่างเด่นชัด (Dwivedi *et al.*, 2017)

## สรุปผลการวิจัย

ประชากรมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และการแจกแจงแกมมา วิธี NBYT สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้สูงสุด ประมาณร้อยละ 88.46 ของเงื่อนไขทั้งหมด สำหรับทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ใกล้เคียงกันประมาณร้อยละ 53.85 – 57.69 ของเงื่อนไขทั้งหมด โดยส่วนใหญ่ควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เมื่อขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \le 30$ สำหรับขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ ส่วนใหญ่สามารถควบคุมได้เฉพาะความแปรปรวน

เท่ากัน เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพของสถิติทดสอบ พบว่า กรณีความแปรปรวนเท่ากัน และความแปรปรวนไม่เท่ากัน และขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 \le 30$ วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด บางกรณีให้กำลังการทดสอบที่สูงถึง 95.68% ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 = 30$ และความแปรปรวนไม่เท่ากัน อัตราส่วน 1:4 และ 1:9 วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด สำหรับกรณีขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2 > 30$ และความแปรปรวนเท่ากัน วิธี NBWR มีประสิทธิภาพสูงสุด กรณีความแปรปรวนไม่เท่ากัน วิธี NBYT มีประสิทธิภาพสูงสุด ดังนั้นวิธีดังกล่าวข้างต้นมีความเหมาะสมอย่างยิ่งในการนำไปประยุกต์ใช้ในการทดสอบตำแหน่ง เพื่อให้ผลการวิจัยมีความตรงภายใน (Internal validity) และความตรงภายนอก(External validity)ต่อไป

**เอกสารอ้างอิง**

Bradley, J. V. (1978). Robustness?. *Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *31*, 321-339.

Bridge, P. D., & Sawilowsky, S. S. (1999). Increasing physicians' awareness of the impact of statistics on research outcomes: comparative power of the t-test and Wilcoxon rank-sum test in small samples applied research. *Journal of Clinical Epidemiology*, *52*, 229-235.

George W. Divine, H. James Norton, Anna E. Barón & Elizabeth JuarezColunga

Dwivedi, A. K., Mallawaarachchi, I., & Alvarado, L. A. (2017). Analysis of small sample size studies using nonparametric bootstrap test with pooled resampling method. *Statistics in Medicine*, *36*, 2187-2205.

Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall.

Fagerland, M. W., & Sandvik, L. (2009). Performance of five two-sample location tests for skewed distributions with unequal variances. *Contemporary Clinical Trial*, *30*, 490-496.

Harwell, M. R., Rubinstein, E. N., Hayes, W. S., & Olds, C. C. (1992). Summarizing Monte Carlo results in methodological research: The one- and two-factor fixed effects ANOVA cases, *Journal of Educational Statistics*, 17, 315-339.

Mickelson, W. T. (2013). A monte carlo simulation of the robust rank-order test under various population symmetry conditions. *Journal of Modern Applied Statistical Methods, 12*(1), 21-33.

Neuhauser, M. (2012). Nonparametric statistical tests: A computational approach. Florida: CRC Press.

Nguyen, D. T., Kim, E. S., Gil, P. R., Kellermann, A., Chen, YH., Kromrey, J. D., & Bellara, A. (2016). Parametric Tests for Two Population Means under Normal and Non-Normal Distribution. *Journal of Modern Applied Statistical Methods, 15*(1), 141-159.

Reiczigel, J., Zakarias, I., & Rozsa, L. (2005). A bootstrap test of stochastic equality of two populations. *The American Statistician*, *59*(2), 1-6, DOI: 10.1198/000313005X23526.

Stonehouse J. M., & Forrester. G. J. (1998). Robustness of the t and U tests under combined assumption violations. *Journal of Applied Statistics*, *25*(1), 63-74.

Welch, B. L. (1938). The significance of the difference between two means when the population variances are unequal, *Biometrika*, *29*, 350-362.

Welz, A., Ruxton, G. D., & Neuhauser, M. (2018). A non-parametric maximum test for the Behrens-Fisher problem. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, DOI: 10.1080/00949655.2018.1431236.

Wilcox, R. R. (1990). Comparing the mean of two independent group, *Biometrical Journal*, 32, 771-780.

Wilcox, R. R. (1994). Some results on the Tukey-Mclaughlin and Yuen methods for trimmed means when distribution are skewed. *Biometrical Journal*, 3, 259-273.

Wilcox, R. R. (2003). *Applying contemporary statistical techniques*. San Diego, CA: Academic Press.

Wilcox, R. R. (2005). *Introduction to robust estimation and hypothesis testing*. (2nd ed). San Diego, CA: Academic Press.

Wilcox, R. R., & Keselman, H. J. (2003). Modern robust data analysis method: measures of central tendency. *Psychological Methods*, *8*, 254-274.

Yuen, K. K. (1974). The two-sample trimmed t for unequal population variances. *Biometrika*, *61*, 165-170.

Zimmerman, D. W., & Zumbo, B. D. (1993a). Rank transformations and the power of the Student t test and Welch t test non-normal populations with unequal variances. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, *47,* 523-539.

Zimmerman, D. W., & Zumbo, B. D. (1993b). The relative power of parametric and nonparametric statistical methods. *In A handbook for data analysis in the behavioral sciences: Methodological issues*, G. Keren & C. Lewis (Eds.), 481-517. Hillsdale, NJ: Erlbaum.