การแสดงถึงความไม่มีคำตอบและความไม่มีขอบเขตของปัญหาหลัก - ปัญหาคู่ควบ โดยใช้วิธีการตามเส้นทางจุดภายใน

Infeasibility and Unboundedness of Primal-Dual Problems Using Interior-point Methods

ธนะศักดิ์ หมวกทองหลาง*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Thanasak Mouktonglang*

Mathematics Department, Faculty of Science, Chiangmai University Thailand

บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาการใช้วิธีจุดภายในในการหาตัวบ่งบอกถึงความไม่มีคำตอบและความไม่มีขอบเขตของปัญหาหลัก - ปัญหาคู่ควบ และได้ทำการศึกษากรณีที่ใช้ ขั้นตอนวิธีการตามเส้นทางคู่ควบ (Dual) และพบว่าพฤติกรรมทางทฤษฎีมีความแตกต่างไปจากขั้นตอนวิธีการตามเส้นทางหลัก-คู่ควบ (Primal-Dual) เนื่องจากฟังก์ชันขวางกั้นมาตรฐานมีความซับซ้อนน้อยกว่า

คำสำคัญ : วิธีจุดภายใน ความไม่มีคำตอบ หลัก-คู่ควบ

Abstract

We apply interior-point method to find infeasibility and unboundedness certifies. We study dual path-following interior-point method and compare it to primal-dual method. Both methods are able to find certifies. However, there are differences in the theories due the less of complexity of the universal barrier function.

Keywords : Interior-point methods, Infeasibility, Primal-dual.

***E-mail:** thanasak@chiangmai.ac.th

บทนำ (Introduction)

วิธีการตามเส้นทางของจุดภายใน (path-following interior points method)(Gonzaga, 1992) เป็นขั้นตอนวิธีที่ใช้เส้นทางศูนย์กลาง (central path) ในการหาคำตอบที่เหมาะสม (optimal solution) (Ye, 1997) สำหรับปัญหาการกำหนดการเชิงเส้นและปัญหาการกำหนดการโคนิค (Conic programming) และการที่จะมีเส้นผ่านศูนย์กลางนั้น ปัญหาหลักและปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบนั้นจะต้องมีคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ (strictly feasible solution) นอกจากนี้ Todd (2004) ได้แสดงเหตุผลในการใช้ขั้นตอนวิธีหลัก-คู่ควบ ไว้ว่าขั้นตอนวิธีนี้ใช้วิธีเส้นทางศูนย์กลางในการหาคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาช่วย (auxiliary problem) ที่ได้แสดงถึงการไม่มีคำตอบที่เป็นไปไม่ได้และความไม่มีขอบเขต (infeasibility and unboundedness) ของปัญหาเริ่มต้น (Todd, 2004) เราได้ทำการศึกษากรณีที่ใช้ ขั้นตอนวิธีการตามเส้นทางคู่ควบ (dual path-following algorithms) และได้พบว่าพฤติกรรมทางทฤษฎีมีความแตกต่างไปจากขั้นตอนวิธีการตามเส้นทางหลัก-คู่ควบ

พิจารณา (*D*) max $b^T y$

$$A^T y + s = c$$
$$s \geq 0$$

(*P*) min $c^T x$

$$Ax = b,$$
$$x \geq 0$$

โดยที่ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และมีแรงค์ m และ c, x และ s เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$, b และ y เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$

เรามุ่งความสนใจไปที่ (D) เพราะว่าวิธีจุดภายในคู่ควบนี้เป็นตัวอย่างในการนำไปใช้กับรูปแบบปัญหาเหล่านี้ เช่น ขั้นตอนวิธีการตามเส้นทางคู่ควบของ Renegar (Renegar, 1988), dual affine-scaling method ของ Adler *et al*. (Adler *et al*., 1989) และ dual potential-reduction algorithms ของ Benson, Ye, และ Zhang (Benson *et al*., 2000) ในปัญหาการกำหนดการ semidefinite

ถ้าเราต้องการที่จะตรวจสอบความไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้และความไม่มีขอบเขตอย่างมีประสิทธิภาพในขั้นตอนวิธีคู่ควบ เราจะต้องมีการคู่ควบฟังก์ชันขวางกั้น นอกจากนี้เหตุผลในการนำไปใช้ในการพิจารณา (D) นั่นก็คือ มีฟังก์ชันขวางกั้น ที่มีค่าเชิงซ้อน (complexity value) ที่น้อยกว่า n มากๆ

ตัวอย่างหนึ่งของฟังก์ชันขวางกั้น คือ universal barrier สำหรับ L_1-ball ใน $\mathbb{R}^m$ โดย Güler (Güler, 1996) ถึงแม้ว่าฟังก์ชันขวางกั้นนี้ไม่สามารถที่จะคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตาม สำหรับงานศึกษาส่วนมากนั้นจะพิจารณาฟังก์ชันขวางกั้นมาตรฐาน $-ln(s)$ สำหรับ $\mathbb{R}^n_+$ และฟังก์ชันขวางกั้นที่สอดคล้อง $-ln(c- A^T y)$ สำหรับ (D) โดยที่ $ln(v)$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นผลรวมของลอการิทึมฐานธรรมชาติของส่วนประกอบของ v และที่ได้กล่าวมาก็เป็นตัวอย่างที่สามารถเข้าใจได้อย่างง่ายในการพัฒนา และในการนำไปเปรียบเทียบกับวิธีหลัก-คู่ควบ (Nesterov *et al*., 1993)

ในการแก้ปัญหาหลักและปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบเพื่อที่จะได้คำตอบที่เหมาะสมนั้น จะได้ว่าคำตอบที่ได้นั้นจะมีค่าที่ซึ่งอยู่บนขอบ และเพื่อแก้ปัญหานี้ เราจะทำการเพิ่มฟังก์ชันขวางกั้นเข้าไปในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อที่จะแก้ปัญหาที่ทำให้คำตอบที่ได้นั้นอยู่บนขอบ

พิจารณาปัญหาขวางกั้น (barrier problem)

(BD_μ) max $b^T y + \mu \ln(s)$

$$A^T y + s = c,$$
$$s > 0$$

(BP_μ) min $c^T x - \mu \ln(x)$

$$Ax = b,$$
$$x > 0$$

โดยที่ $\ln(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ และ μ ลดลงเข้าสู่ 0 และ $s > 0$ เนื่องจากว่า ถ้า s เข้าสู่ขอบของเซตของคำตอบที่เป็นไปได้จะได้ว่า $ln(s)$ จะลู่เข้าสู่ลบอนันต์

พิจารณาเงื่อนไขความเหมาะสมสุด (optimality condition) ของ ($BD\mu$) และ ($BP\mu$) เงื่อนไขความเหมาะสมสุดเป็นเงื่อนไขพีชคณิต ที่จะต้องสอดคล้องกับคำตอบของปัญหาการกำหนดการเชิงเส้น เราจะประยุกต์ใช้ตัวคูณลากรานจ์ (lagrange multiplier) ในการหาเงื่อนไขที่เหมาะสมที่สุด เราจะเรียกเงื่อนไขนี้ว่า Karush-Kuhn-Tucker condition (KKT)

ต่อไปจะพิจารณาฟังก์ชันลากรานจ์ สำหรับปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบ

$$L(x, y, s) = b^T y + \mu \sum_i \ln(s_i) - x^T (A^T y + s - c) \quad (1.1)$$

$$\nabla_y L = b^T - x^T A^T = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla_x L = A^T y + s - c = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = \frac{\mu}{s_i} - x_i = 0 \quad (1.4)$$

จาก (1.2) จะได้ว่า

$$Ax = b \quad (1.5)$$

จาก (1.3) จะได้ว่า

$$A^T y + s = c \quad (1.6)$$

และจาก (1.4) จะได้ว่า

$$x^T s = \mu \quad (1.7)$$

ดังนั้นจาก (1.5), (1.6) และ (1.7) จะได้เงื่อนไขตามความเหมาะสมสุดสำหรับ $(BD\mu)$ นั่นคือ มี $x \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} &A^T y + s = c, \quad s > 0 \\ &Ax = b, \\ &x^T s = \mu \end{aligned} \quad (1.8)$$

ดังนั้นจะได้ว่า $x = \mu s^{-1} > 0$

พิจารณาฟังก์ชันลากรานจ์สำหรับปัญหาหลัก

$$L(x, y) = c^T x - \mu \sum_i \ln(x_i) - y^T (b - Ax) \quad (1.9)$$

$$\nabla_y L = b - Ax = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = c_i - \frac{\mu}{x_i} - y_i A = 0 \quad (1.11)$$

โดยที่การกระทำ ∇ คือการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และกำหนดให้

$$s_i = \frac{\mu}{x_i} \quad (1.12)$$

จาก (1.10) จะได้ว่า

$$Ax = b \quad (1.13)$$

จาก (1.11) จะได้ว่า

$$A^T y + s = c \quad (1.14)$$

และจาก (1.12) จะได้ว่า

$$x^T s = \mu \quad (1.15)$$

ดังนั้นจาก (1.13), (1.14) และ (1.15) จะได้เงื่อนไขความเหมาะสมสุดสำหรับ $(BP\mu)$ นั่นคือ มี $(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} &A^T y + s = c, \\ &Ax = b, \quad x > 0 \\ &x^T s = \mu \end{aligned} \quad (1.16)$$

ดังนั้นจะได้ว่า $x^T s = +\mu > 0$

จะเห็นว่าเงื่อนไขความเหมาะสมสุดของ $(BD\mu)$ และ $(BP\mu)$ นั้นสมมูลกัน จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมมาตรได้ คือ

$$\begin{aligned} &A^T y + s = c, \quad s > 0 \\ &Ax = b, \quad x > 0 \\ &XSe = \mu e \end{aligned} \quad (1.17)$$

โดยที่ X และ S เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม และ $e \in \mathbb{R}^n$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็นหนึ่ง

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$$

และ $e = [1\ 1 \ldots\ 1]^T$ และจะเรียกระบบสมการ (1.17) นี้ว่าสมการเส้นทางศูนย์กลาง ((primal dual) central path equation)

ทฤษฎีบท 1. *ทฤษฎีเส้นทางศูนย์กลาง (central path theorem)*

สมมติให้ (P) และ (D) มีคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ $(x > 0, s > 0)$ แล้วจะได้ว่าทุก $\mu > 0$ ระบบสมการเชิงเส้นทางศูนย์กลางจะมีคำตอบเพียงค่าเดียว $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ และถ้า $\mu > 0$ (จาก *smooth path*) และ $\mu \to 0$ จะได้ว่า $x(\mu)$ และ $(y(\mu), s(\mu))$ ลู่เข้าสู่คำตอบที่เหมาะสมของ (P) และ (D) ตามลำดับ ยิ่งไปกว่านั้นจะได้ว่า ถ้าทุกๆ $\mu > 0$ จะได้ว่า $x(\mu)$ และ $(y(\mu), s(\mu))$ เป็นคำตอบค่าเดียวของ $(BP\mu)$ และ $(BD\mu)$ ตามลำดับ

พิจารณาระบบสมการ (1.17) จะเห็นว่าสมการสุดท้ายนั้นไม่เป็นสมการเชิงเส้น จึงทำให้การหาคำตอบของระบบสมการนี้เป็นไปได้ยาก ดังนั้นเราจะหาคำตอบโดยจะประยุกต์ใช้วิธีของนิวตันเข้าไปในวิธีการทำซ้ำ (x, y, s) โดยที่ $x > 0$ และ $x > 0$ ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป และจะได้ว่าถ้าวิธีการทำซ้ำ x และ (y, s) เป็นไปได้ (feasible) ใน (P) และ (D) ตามลำดับ จะเรียกว่าเป็น

วิธีจุดภายในที่เป็นไปได้ (feasible interior point methods) แต่ถ้าไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ (infeasible) เราจะเรียกว่าเป็น วิธีจุดภายในที่เป็นไปไม่ได้ (infeasible interior point methods: IIPM)

ในงานศึกษานี้เราสนใจที่จะศึกษาในกรณีที่ (D) มีคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ $(s > 0)$ (และมีเส้นทางศูนย์กลาง) และ (P) มีคำตอบที่เป็นไปไม่ได้โดยแท้ $(x > 0)$ (ดังนั้นจะได้ว่า (D) ไม่มีขอบเขต) นั่นคือเราต้องการที่จะตรวจสอบ *ความไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหาหลักและ ความไม่มีขอบเขตของปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบ* โดยจะใช้ผลลัพธ์จากบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2. (*Farkas Lemma*)

(i) (P) *เงื่อนไข* $(Ax = b,\ x \geq 0)$ *จะไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อ มีบาง* $(y,\ s)$ *ที่สอดคล้องกับ* $A^T y + 0,$ $s \geq 0,\ b^T y > 0$

(ii) (D) *เงื่อนไข* $(A^T y + s = c,\ s \geq 0)$ *จะไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อ มีบาง* x ที่สอดคล้องกับ $A^T = 0,$ $x \geq 0,\ c^T x < 0$

เราจะเรียก $(y,\ s)$ *ที่สอดคล้องกับ* (i) *ว่าเป็น* **ตัวบ่งบอกถึงความไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้และความไม่มีขอบเขต (infeasibility-unboundedness certifies)**

(Todd *et al.*, 2004) ได้กล่าวถึงการใช้ IIPM กับปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบและปัญหาหลักในการตรวจสอบหา *ความไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้และความไม่มีขอบเขตของปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบ* โดยที่คำตอบที่ได้คือ ตัวบ่งบอกถึงความไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้และความไม่มีขอบเขต พิจารณา

$$(\bar{D}) \qquad \max\ (Ax_0)^T\, \bar{y}$$
$$A^T \bar{y} + \bar{s} = 0,$$
$$b^T \bar{y} = 1,$$
$$\bar{s} \geq 0$$

$$(\bar{P}) \qquad \min\ \bar{\zeta}$$
$$A\bar{x} + b\bar{\zeta} = Ax_0,$$
$$\bar{x} \geq 0$$

จะเห็นว่า $(\bar{D})$ มีเงื่อนไขบังคับที่สอดคล้องความเป็น primal infeasibility และฟังก์ชันจุดประสงค์นั้น ขึ้นอยู่กับ x_0 ที่เป็นการทำซ้ำเริ่มต้นและทุกๆ วิธีการทำซ้ำ $(x,\ y,\ s)$ สำหรับ (P) และ (D) นั้น จะมีวิธีการทำซ้ำ $(\bar{x}, \bar{\zeta}, \bar{y}, \bar{s})$ สำหรับ $(\bar{P})$ และ $(\bar{D})$ เราจะเรียกการทำซ้ำนี้ว่า การทำซ้ำดั้งหลัก (original iterate) และการทำซ้ำเงา (shadow iterate) ตามลำดับ และจากที่เราสมมุติให้ $(y,\ s)$ เป็นคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้สำหรับ (D) และ x เป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้โดยแท้สำหรับ (P) ในวิธีการทำซ้ำ $(x,\ y,\ s)$ แต่ในการทำซ้ำเงานั้นจะได้ว่า $(\bar{y}, \bar{s})$ เป็นคำตอบโดยประมาณที่เป็นไปได้สำหรับ $(\bar{D})$ และ $(\bar{x}, \bar{\zeta})$ เป็นคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้สำหรับ $(\bar{P})$ (ตัวอย่างเช่นในกรณีที่การทำซ้ำเงาเริ่มต้น $\bar{x} = x_0$ และ $\bar{\zeta} = 0$) และใน (Todd *et al.*, 2004) ได้เปรียบเทียบผลที่ได้จากการทำซ้ำดั้งหลักและการทำซ้ำเงา ซึ่งเราจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

ปัญหาศูนย์กลาง (The centering problem)

ในหัวข้อนี้เราได้นิยาม natural centering problem สำหรับการหา primal infeasibility-dual unboundedness certificates และเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการหาคำตอบ โดยเราจะสมมุติให้ (P) มีคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ จากบทตั้งของ Farkas จะได้ว่า มี $(\bar{y}, \bar{s})$ ที่สอดคล้องกับ

$$A^T \bar{y} + \bar{s} = 0, \quad b^T \bar{y} = 1,\ \bar{s} \geq 0$$

กำหนดให้ $(y, s) = \lambda(\bar{y}, \bar{s}) + (0, c) = (\lambda\bar{y}, \lambda\bar{s} + c)$

โดยที่ λ เป็นตัวคูณที่เป็นค่าคงที่ที่ค่ามากอย่างเพียงพอ และ c เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้ว่า

$$A^T \bar{y} + s = A^T(\lambda\bar{y}) + (\lambda\bar{s} + c)$$
$$= \lambda(A^T \bar{y} + \bar{s}) + c$$
$$= c \qquad \text{เนื่องจาก } A^T \bar{y} + \bar{s} = 0$$

จะได้ว่า $A^T \bar{y} + \bar{s} = c$, $s>0$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับของ (D) ทำให้ได้ว่า (D) มีคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ $(s > 0)$ และ เนื่องจาก $b^T \bar{y} = b^T(\lambda\bar{y}) = \lambda b^T \bar{y} = \lambda$ $(\because b^T \bar{y} = 1)$ นั่นคือ ถ้า $\lambda \to 0$ จะทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ของ (D) มีค่าเข้าสู่อนันต์ด้วย $(b^T y \to \infty$ นั่นก็คือ (D) ไม่มีขอบเขต

พิจารณาปัญหาศูนย์กลาง

$$(CD) \qquad \max\ \ln(\bar{s})$$
$$A^T \bar{y} + \bar{s} = 0$$
$$b^T \bar{y} = 1$$
$$\bar{s} \geq 0$$

คำตอบที่เหมาะสมของปัญหานี้ (ถ้ามี) ก็คือ analytic center ของเซตของ primal infeasibility-dual unboundedness certificates ในการหาคำตอบเราจะพิจารณาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับปัญหานี้ โดยประยุกต์ใช้ตัวคูณลากรานจ์ในการหาเงื่อนไข ดังนี้

พิจารณาฟังก์ชันลากรานจ์สำหรับปัญหาศูนย์กลาง โดยพิจารณาจาก (CD)

$$L(\bar{x},\bar{y},\bar{s}) = \ln(\bar{s}) - \bar{x}(A^T\bar{y}+\bar{s}) \tag{2.1}$$

$$\nabla_{\bar{y}} L = -\bar{x}A^T = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla_{\bar{s}} L = \frac{1}{s} - \bar{x} = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla_{\bar{x}} L = -A^T\bar{y} - \bar{s} = 0 \tag{2.4}$$

จาก (2.3) จะได้ว่า

$$\bar{x} - \bar{s}^{-1} = 0 \tag{2.5}$$

จาก (2.4) จะได้ว่า

$$A^T\bar{y} + \bar{s} = 0 \tag{2.6}$$

และในการหาเงื่อนไขความเหมาะสมสุดของ (CD) นี้ ยังพิจารณาฟังก์ชันลากรานจ์จาก ($\bar{P}$) นั่นคือ

$$L(\bar{x},\bar{\zeta},\bar{y}) = \bar{\zeta} - \bar{y}(A\bar{x} + b\bar{\zeta} - Ax_0) \tag{2.7}$$

$$\nabla_{\bar{x}} L = -\bar{y}A = 0 \tag{2.8}$$

$$\nabla_{\bar{\zeta}} L = 1 - \bar{y}b = 0 \tag{2.9}$$

$$\nabla_{\bar{y}} L = A\bar{x} + b\bar{\zeta} - Ax_0 = 0 \tag{2.10}$$

กำหนดให้ $b_0 \equiv Ax_0$ จาก (2.9) จะได้ว่า

$$b^T\bar{y} = 1 \tag{2.11}$$

จาก (2.10) จะได้ว่า

$$A\bar{x} + b\bar{\zeta} = Ax_0 = 0 \qquad (\because 0 = b_0 = Ax_0) \tag{2.12}$$

ดังนั้นจาก (2.5), (2.6), (2.11) และ (2.12) จะได้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับ $(\bar{y},\bar{s})$ ในการคำตอบของ (CD) นั่นคือ มี $(\bar{x},\bar{\zeta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} &A^T\bar{y} + \bar{s} = 0, \quad s > 0 \\ &b^T\bar{y} = 1, \\ &A\bar{x} + b\bar{\zeta} = 0, \\ &\bar{x}^T\bar{s} = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

ต่อมาจะพูดถึงลักษณะเฉพาะที่จะบอกว่าเมื่อไรที่ (CD) จะมีคำตอบ

ประพจน์ 3. *(CD) จะมีคำตอบที่เหมาะสมหรือระบบสมการ (2.13) มีคำตอบก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $\tilde{b}$ ที่มีค่าเข้าใกล้ b อย่างเพียงพอ* min $\{\tilde{b}^T y : A^T y + s = c, s > 0\}$ *มีคำตอบที่เหมาะสม*

หมายเหตุ *เงื่อนไขนี้ก็คือปัญหาการหาค่าที่น้อยที่สุดที่มีคำตอบที่เหมาะสม (ถ้า $\tilde{b} = b$ จะได้ว่านี่ก็คือปัญหาการหาค่าที่มากที่สุด)*

พิสูจน์ . $(\Rightarrow)$ (CD) หรือ (2.13) มีคำตอบ ก็ต่อเมื่อ มีบางคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ $\bar{x}$ ซึ่ง

$$A\bar{x} + b\bar{\zeta} = 0,\ \bar{x} \ge 0$$

พิจารณากรณี $\bar{\zeta} < 0$ จาก $A\bar{x} + b\bar{\zeta} = 0$, $\bar{x} \ge 0$ จะได้ว่า

$$A\bar{x} = -b\bar{\zeta},\ \bar{x} \ge 0$$

ให้ $\bar{\zeta} = -\bar{\zeta}^*$ โดยที่ $\bar{\zeta}^* > 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$A\bar{x} = -b(-\bar{\zeta}^*) = b\bar{\zeta}^*$$

นั่นคือ $A\bar{x} = b\bar{\zeta}^*$ โดยที่ $\bar{\zeta}^* > 0$ นั่นคือ $A(\frac{\bar{x}}{\bar{\zeta}^*}) = b$

ให้ $\bar{x}^* = \frac{\bar{x}}{\bar{\zeta}^*}$ โดยที่ $\bar{x}^* > 0$ จะได้ว่า

$$A\bar{x}^* = b, \quad \bar{x}^* > 0$$

นั่นคือ ถ้า $\bar{\zeta} < 0$ จะได้ว่า (P) มีคำตอบที่เป็นไปได้ ซึ่งขัดแย้งจากที่ (P) ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้

พิจารณากรณี $\bar{\zeta} = 0$ จะได้ว่า $A\bar{x} = 0$, $\bar{x} \ge 0$

เนื่องจาก A มี ฟูลแร็งค์ จะได้ว่า มี x ที่สอดคล้องกับ $Ax = b$ ให้ λ เป็นตัวคูณที่มีค่ามากอย่างเพียงพอ นั่นคือ $\lambda\bar{x} + x > 0$ โดยที่ $\lambda, \bar{x} > 0$ พิจารณา

$$\begin{aligned} A(\lambda\bar{x} + x) &= \lambda A\bar{x} + Ax \\ &= \lambda(0) + Ax \qquad (\because A\bar{x} = 0) \\ &= Ax \\ &= b \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $A(\lambda\bar{x} + x) = b$

ให้ $\bar{x}^* = \lambda\bar{x} + x$ จะได้ว่า

$$A\bar{x}^* = b, \quad \bar{x}^* > 0$$

นั่นคือ ถ้า $\bar{\zeta} = 0$ จะได้ว่า (P) มีคำตอบที่เป็นไปได้ แต่ในขณะเดียวกัน จากสมมุติฐาน $A^T\bar{y} + \bar{s} = 0$, $s > 0$ และ $b^T\bar{y} = 1$ ซึ่งจะส่งผลให้เกิดข้อแย้งจากที่ (P) ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ตามผลลัพธ์ ของบทตั้งที่ 2

พิจารณากรณี $\bar{\zeta} > 0$ จะได้ว่า $A\bar{x} = -b\bar{\zeta}, \bar{x} \ge 0$, $\bar{\zeta} > 0$ นั่นคือ

$$A(\frac{\bar{x}}{\bar{\zeta}}) = -b$$

ให้ $x = \frac{\bar{x}}{\zeta}$ โดยที่ $\bar{x} \geq 0$ จะได้ว่า

$$Ax = -b,\ x \geq 0$$

นั่นคือจะได้ว่า $\zeta > 0$ เพียงกรณีเดียว

ดังนั้น (CD) จะมีคำตอบที่เหมาะสม ก็ต่อเมื่อมีบางคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ x ซึ่ง $Ax = -b,\ x \geq 0$

เนื่องจาก A มี ฟูลโรวแร็งค์ (full row rank) เป็น m จะได้ว่ามีบางคำตอบ ที่ซึ่ง $Ax = \pm e_i$ โดยที่ e_i เป็นเวกเตอร์พิกัดที่ i ใน $\mathbb{R}^m$ และจากที่มีบางคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ $x > 0$ ซึ่ง $Ax = -b$

ให้ $x^* = x + \varepsilon e_i,\ x^* \geq 0,\ \varepsilon > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Ax^* &= A(x + \varepsilon e_i) \\ &= -(b - \varepsilon A e_i) \end{aligned}$$

ให้ $\widetilde{b} = b - \varepsilon A e_i$ จะได้ว่า

$$Ax^* = -\widetilde{b},\quad x^* \geq 0$$

ดังนั้นจะได้ว่ามีคำตอบที่เป็นไปได้ x ซึ่ง $Ax = -\widetilde{b},\ x \geq 0$ ทุกๆ $\widetilde{b}$ ที่มีค่าเข้าใกล้ b อย่างเพียงพอ

$(\Leftarrow)$ จะแสดงว่า มีบางคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ x ซึ่ง $Ax = -b,\ x \geq 0$

พิจารณา $x \geq 0$ ซึ่ง $Ax = -\widetilde{b}$ เลือก $\widetilde{b} = b + \varepsilon A e_i,\ \varepsilon > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Ax &= -(b + \varepsilon A e_i) \\ Ax &= -b - \varepsilon A e_i \\ Ax + \varepsilon A e_i &= -b \\ &= -b \end{aligned}$$

ให้ $x^* = x + \varepsilon e_i,\ x^* > 0$ จะได้ว่า

$$Ax^* = -b,\quad x^* > 0$$

ดังนั้นจะได้ว่ามีคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ $x > 0$ ที่สอดคล้องกับ $Ax = -b,\ x \geq 0$

นั่นคือ (D) มีคำตอบที่เป็นไปได้

พิจารณา (P) min $c^T x$ ซึ่ง $Ax = -\widetilde{b},\ x \geq 0$ และ (D) max $-\widetilde{b}^T y$ ซึ่ง $A^T y + s = c,\ s \geq 0$

สามารถเขียนปัญหา (D) ในรูปของการหาค่าที่น้อยที่สุดได้ นั่นคือ

$$(D)\ \min -\widetilde{b}^T y \text{ ซึ่ง } A^T y + s = c,\ s \geq 0$$

ดังนั้นจะได้ว่า (CD) จะมีคำตอบที่เหมาะสม (หรือ (2.13) มีคำตอบ) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $\widetilde{b}$ ที่มีค่าเข้าใกล้ b อย่างเพียงพอ ที่สอดคล้องกับ min $\{ \widetilde{b}^T y : A^T y + s = c, s \geq 0 \}$ มีคำตอบที่เหมาะสม

สรุปและข้อคิดเห็น (Concluding Remarks)

จากการศึกษาวิธีการตามเส้นทางของจุดภายในซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีที่ใช้เส้นทางศูนย์กลางในการหาคำตอบที่เหมาะสมสำหรับปัญหาการกำหนดการเชิงเส้นและปัญหาการกำหนดการโคนิค และการที่จะมีเส้นผ่านศูนย์กลางนั้น ปัญหาหลักและปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบนั้นจะต้องมีคำตอบที่เป็นไปได้โดยแท้ นักคณิตศาสตร์หลายท่าน อาทิเช่น Michael J.Todd, Nesterov, Y และ E., Nemirovskii ได้แสดงเหตุผลในการใช้ขั้นตอนวิธีหลัก-คู่ควบ ไว้ว่าขั้นตอนวิธีนี้ใช้วิธีเส้นทางศูนย์กลางในการหาคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาช่วยที่ได้แสดงถึงการไม่มีคำตอบที่เป็นไปไม่ได้และความไม่มีขอบเขตของปัญหาเริ่มต้น เราได้ทำการศึกษากรณีที่ใช้ขั้นตอนวิธีการตามเส้นทางคู่ควบ และพบว่าพฤติกรรมทางทฤษฎีมีความแตกต่างไปจากขั้นตอนวิธีการตามเส้นทางหลัก-คู่ควบเนื่องจากฟังก์ชันขวางกั้นมาตรฐานมีความซับซ้อนน้อยกว่าจึงทำให้การคำนวณ มีความซับซ้อนที่น้อยกว่า ซึ่งทั้งสองวิธีนั้นเราสามารถหาตัวบ่งบอกถึงความไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้และความไม่มีขอบเขตของปัญหาหลัก-ปัญหาคู่ควบได้

เอกสารอ้างอิง (References)

Adler, I., Resende, M.G.C., Veiga, G., Karmarkar, N.K. (1989). An implementation of Karmarkar's algorithms for linear programming. *Mathematical Programming. 44*(3), 297-335.

Benson, SJ., Ye, Y., Zhang, X., (2000). Solving large-scale sparse semidefinite programs for combinatorial optimization, *SIAM Journal of Optimization. 10*(2), 443-461.

Gonzaga, C.C. (1992). Path following methods for linear programming. *SIAM Review. 34*(2), 167-224.

Güler, O. (1996). Barrier functions in interior point methods. *Mathematics of Operations Research. 21*, 860-885.

Nesterov, Y.E., Nemirovskii, A.S. (1993). *Interior Point Polynomial Method in Convex Programming: Theory and Algorithms*. SIAM, Philadelphia.

Renegar, J. (1988). A polynomial-time algorithms based on Newton's method for linear programming. *Mathematical Programming. 40*, 59-93.

Todd, M.J. (2004). Detecting infeasibility in infeasible-interior-point methods for optimization. In: Cucker, F., DeVore, R., Olver, P., Süli, E. (eds.) *Foundations of Computational Mathematics, Minneapolis 2002*, pp. 157-192. Cambridge University Press, Cambridge.

Ye, Y. (1997). *Interior Point Algorithms: Theory and Analysis*. Wiley, New York.