การเปรียบเทียบการทดสอบและวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อนในการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

The Comparison of Tests and Corrections for Heteroscedasticity Problem in Simple Linear Regression

วรรณพร จันโทภาส* และจิราวัลย์ จิตรถเวช
คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
Wannaporn Junthopas* and Jirawan Jitthavech
School of Applied Statistics, National Institute of Development Administration

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อนระหว่างการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ (Goldfeld-Quandt Test) กับการทดสอบของธิล (Theil' F Test) และเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนัก และไม่ทราบค่าน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็น 2, 3 และ 5 กลุ่ม เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหา คือ ค่าร้อยละการยอมรับสมมุติฐานว่างหลังการแก้ปัญหา การศึกษาใช้วิธีการสร้างแบบจำลองในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย กรณีข้อมูลภาคตัดขวาง เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีลักษณะไม่คงที่ตามค่าของตัวแปรอิสระในรูปแบบ $Var(\varepsilon_i) = X_i^{\delta}$; δ = -4.0, -3.6, ..., 0.0, 0.4, 0.8, ..., 4.0 ขนาดตัวอย่าง 10, 15, 30, 60 และ 120 โดยทำการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 ซึ่งจะกระทำซ้ำ 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

การเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน พบว่า การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ ให้ค่าประมาณอำนาจการทดสอบสูงกว่าของธิลเกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ค่าตัวแปรอิสระและรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก (n = 10) และกรณีที่รูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลง ค่าตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น เมื่อตัวอย่างมีขนาด 10 และ 15 การทดสอบของธิลจะดีกว่าการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ ในทุกระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนและระดับนัยสำคัญ โดยการทดสอบทั้ง 2 จะมีค่าประมาณอำนาจการทดสอบสูงใกล้เคียงกันเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (n = 60, 120) และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนอยู่ในระดับสูง ($2.8 < |\delta| \leq 4.0$)

การเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน สรุปได้ว่า ทุกระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อไม่ทราบค่าน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็น 3 และ 5 กลุ่ม สามารถแก้ปัญหาได้ดี ทั้งนี้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนักและไม่ทราบค่าน้ำหนัก สามารถแก้ปัญหาได้ดีใกล้เคียงกันในกรณีค่าของตัวแปรอิสระและรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นอยู่ในระดับปานกลางถึงสูง ($1.6 < |\delta| \leq 4.0$) เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กถึงปานกลาง (n = 10, 15, 30) และในทุกระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

คำสำคัญ : ความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ การทดสอบของธิล ส่วนตกค้างบลัส วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก

Abstract

This research focuses on comparing the approximate power of heteroscedasticity tests between Goldfeld-Quandt test and Theil'F test and the heteroscedasticity corrections by using the method of weighted least squares with the known weights and the unknown weights. However, the unknown weights could be estimated by dividing the data into 2, 3 and 5 groups. The comparison criterion of the correction effectiveness is defined as the percentage of the accepted null hypothesis after correction. Moreover, the simple linear regression model in case of cross sectional data is used in this research when the variance of error varies with the independent variable as $Var(\varepsilon_i) = X_i^{\delta}$; δ = -4.0, -3.6, ..., 0.0, 0.4, 0.8, ..., 4.0. The samples at size 10, 15, 30, 60 and 120 are repeated 1,000 times for each case. The tests are conducted at the significant level of 0.01 and 0.05.

The comparison of the approximate power of heteroscedasticity tests finds that the Goldfeld-Quandt test gives higher approximate power of the test than Theil'F test at all simulation conditions of error variance and significance except in the case of the small sample size (n = 10) when the variance error increases as a function of independent variable, and in case of the sample size equal to 10 and 15 when the variance error decreases as a function of independent variable. Moreover, both tests tend to give the similar high approximate power of the test in the case of large sample size (n = 60, 120) and large error variance ($2.8 < |\delta| \leq 4.0$).

The comparison of the heteroscedasticity corrections reveals that at all above mentioned levels of error variance, the method of weighted least squares with the unknown weights, estimating from the data that are divided into 3 and 5 groups outperforms the other methods that mentioned above. Moreover, it is found that when the variance of error increases as a function of independent variable. The method of weighted least squares with the known weights and the unknown weights give the same correction effectiveness and the same conclusion can be made for the case that the small and medium sample size (n = 10, 15, 30) with the error variance is between medium and large ($1.6 < |\delta| \leq 4.0$) and for the large sample size with all of the error variance.

Keywords : Heteroscedasticity, Goldfeld-Quandt Test, Theil'F Test, BLUS Residual, Weighted Least Squares

***Corresponding author.** E-mail: wannabe.4@gmail.com

บทนำ

วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square Method : OLS) ในการวิเคราะห์การถดถอยนั้น จะได้ตัวประมาณที่มีสมบัติเป็นตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (Best Linear Unbiased Estimator : BLUE) กล่าวคือ เป็นตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียง และมีความแปรปรวนต่ำสุด (Gujarati, 2006) ทั้งนี้จะต้องควบคุมความคลาดเคลื่อน (ε_i) ให้เป็นไปตามข้อตกลง พิจารณาเมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ (Heteroscedasticity) ซึ่งไม่เป็นไปตามข้อตกลงข้อหนึ่งในการควบคุมความคลาดเคลื่อน ทำให้ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยที่ได้ไม่มีประสิทธิภาพ ขาดคุณสมบัติ BLUE และส่งผลต่อการทดสอบสมมุติฐานแบบทีและแบบเอฟ ทำให้ผลที่ได้บิดเบือนจากความเป็นจริง และนำไปสู่ข้อสรุปของการวิเคราะห์การถดถอยที่ผิดพลาดได้ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องทำการทดสอบสมมุติฐานความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเสียก่อน และหากตรวจสอบพบว่ามีปัญหานี้เกิดขึ้น จะต้องดำเนินการแก้ปัญหาด้วยวิธีที่เหมาะสม

การทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์สำหรับทดสอบปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อนที่นำมาศึกษา คือ การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ และการทดสอบของธิล ซึ่งการทดสอบของธิลจะพิจารณาค่าประมาณความคลาดเคลื่อนหรือส่วนตกค้าง (Residual) ที่เรียกว่า ส่วนตกค้างบลัส (Best Linear Unbiased Scalar Covariance Matrix : BLUS Residual) โดยมีสมบัติเป็นตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงที่ดีที่สุดและอยู่ภายใต้เงื่อนไขความแปรปรวนคงที่ $Var(e) = \sigma^2 I$ (Scalar Covariance Matrix) (Theil, 1965) มาใช้ในการพิจารณาตัวสถิติทดสอบในขณะที่การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ จะใช้ผลรวมกำลังสองของส่วนตกค้างโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (SSE) ในการพิจารณาตัวสถิติทดสอบ ซึ่งการทดสอบของธิลจะสูญเสียองศาความเสรีน้อยกว่า แต่การศึกษาของธิลในปี ค.ศ. 1971 และ 1968 ไม่ได้แสดงอำนาจการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบกับการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ และข้อมูลที่ใช้แสดงการทดสอบไม่ได้ให้ประโยชน์ต่อผู้ที่ต้องการศึกษาเท่าไรนัก และการทดสอบนี้ยังไม่ได้รับความนิยมเท่าที่ควร แต่ต่อมาในปี ค.ศ. 2004 Magnus และ Sinha ทำการศึกษาค่าประมาณอำนาจการทดสอบของธิลกับข้อมูลภายใต้ความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน โดยพบว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (n = 100) การทดสอบของธิลมีค่าประมาณอำนาจการทดสอบสูงถึง 0.95 และการศึกษานี้ยังชี้ให้เห็นว่าส่วนตกค้างบลัสยังคงมีประสิทธิภาพและมีบทบาทสำคัญต่อการนำมาใช้วิเคราะห์ข้อมูลโดยเฉพาะทางด้านเศรษฐศาสตร์ (Magnus & Sinha, 2005)

นอกจากนี้ ในความเป็นจริงไม่สามารถทราบถึงรูปแบบที่แน่นอนของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ทำให้ไม่สามารถเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้แน่ชัดว่าวิธีใดเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุด ดังนั้น ผู้วิจัยจึงขอเสนอวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยการประมาณค่าถ่วงน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็นกลุ่มย่อย ซึ่งวิธีนี้สามารถแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อนกรณีไม่ทราบค่าน้ำหนักได้

งานวิจัยนี้สนใจศึกษาเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบและเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน โดยใช้การทดสอบและวิธีการแก้ปัญหาดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น เพื่อเป็นแนวทางในการเลือกใช้วิธีการทดสอบและวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การทดสอบปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อนกรณีรูปแบบความความแปรปรวนมีลักษณะเพิ่มขึ้นหรือลดลงตามตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่ง สมมุติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \quad \text{(Homoscedasticity)} \\ H_1 &: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \quad \text{(Heteroscedasticity)} \end{aligned} \qquad \text{---------- (1)}$$

เมื่อ σ_A^2 และ σ_B^2 คือ ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของกลุ่ม A และ B ตามลำดับ

1. การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ เป็นการทดสอบที่นิยมใช้ในกรณีที่คาดคะเนว่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีลักษณะเพิ่มขึ้นหรือลดลงตามตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่ง โดยใช้อัตราส่วนของผลรวมกำลังสองของส่วนตกค้าง ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของข้อมูลที่ถูกแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มีค่ามากกับกลุ่มที่มีค่าน้อย ที่เป็นอิสระกัน (Goldfeld & Quandt, 1965) โดยมีการตัดกลุ่มของค่าสังเกตที่อยู่ตรงกลางของชุดข้อมูลทิ้งจำนวน c ค่า เพื่อให้เกิดความแตกต่างอย่างชัดเจนว่ากลุ่มข้อมูลที่ได้ จะเป็นข้อมูลของกลุ่มค่าสังเกตที่มีค่าน้อยกับกลุ่มค่าสังเกตที่มีค่ามาก กล่าวคือ พิจารณาจาก $Y = X\beta + \varepsilon$ จะอยู่ใน Partitioned Form : $\begin{pmatrix} Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \end{pmatrix}$ ซึ่งในการวิจัยนี้กำหนด $c \cong \frac{n}{5}$ (Ramanathan, 2008) ตัวสถิติ

ที่ใช้ในการทดสอบ คือ $R_{GQ} = \frac{S_{GQB}}{S_{GQA}}$ โดย S_{GQA} และ S_{GQB} คือ ค่าผลรวมกำลังสองของส่วนตกค้างจากการวิเคราะห์การถดถอยโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (SSE_{OLS}) ของค่าสังเกตกลุ่ม A และ B ตามลำดับ โดยแยกกลุ่มวิเคราะห์ ซึ่งจะปฏิเสธสมมุติฐานว่าง ถ้า $R_{GQ} \geq F_{(\alpha,\frac{n-c-2p}{2},\frac{n-c-2p}{2})}$ เมื่อ n คือ ขนาดตัวอย่าง และ p คือ จำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบ

2. การทดสอบของธิล เป็นการนำค่าส่วนตกค้างบลัสไปใช้ในการทดสอบปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน โดยค่าส่วนตกค้างบลัสได้มาจากการหาค่าส่วนตกค้างที่ทำให้ค่าคาดหมายผลรวมกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าส่วนตกค้างบลัสกับความคลาดเคลื่อน ε มีค่าต่ำสุด ภายใต้เงื่อนไขของความไม่เอนเอียงและความแปรปรวนคงที่ นั่นคือ Minimize : $E[(w - J'\varepsilon)'(w - J'\varepsilon)]$ ภายใต้เงื่อนไข 1) $w - A'Y$ เมื่อ w คือ เวกเตอร์ขนาด $(n - p) \times 1$ ของค่าส่วนตกค้างบลัส, A คือ เมตริกซ์ขนาด $n \times (n - p)$, 2) $E(w - J'\varepsilon) = 0$ และ 3) $Var(A'Y) = \sigma^2 I_{n-p}$, $A'A = I_{n-p}$ (Scalar Variance Matrix) โดยที่ $J' = [0\ I]$ เมื่อ 0 คือ เมตริกซ์ศูนย์ขนาด $(n - p) \times p$ และ I คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $(n - p) \times (n - p)$ (Koerts, 1967) โดยส่วนตกค้างบลัสสามารถเขียนในรูปของ Least-Square Residual ดังนี้

$$w = e_1 - X_1 X_0^{-1}\left[\sum_{h=1}^{p} \frac{d_h}{1+d_h} q_h q_h'\right] e_0 \qquad \text{---------- (2)}$$

เมื่อ w คือ เวกเตอร์ขนาด $(n - p) \times 1$ ของค่าประมาณส่วนตกค้างบลัส

X_0 คือ เมตริกซ์ขนาด $p \times p$ ของตัวแปรอิสระของกลุ่มที่มีค่าสังเกตเท่ากับ p แถว

X_1 คือ เมตริกซ์ขนาด $(n - p) \times p$ ของตัวแปรอิสระของกลุ่มที่มีค่าสังเกตเท่ากับ $n - p$ แถว

e_0 คือ เวกเตอร์ขนาด $p \times 1$ ของส่วนตกค้าง ε_0 (โดยวิธี OLS) ของกลุ่มที่มีค่าสังเกตเท่ากับ p แถว

e_1 คือ เวกเตอร์ขนาด $(n - p) \times 1$ ของส่วนตกค้าง ε_1 (โดยวิธี OLS) ของกลุ่มที่มีค่าสังเกตเท่ากับ $n - p$ แถว

d_h^2 คือ ค่ารากแฝง (Latent Root) ของ $X_0(X'X)^{-1}X_0'$ กล่าวคือ ค่า d_h^2 ที่ทำให้ $\left|X_0(X'X)^{-1}X_0' - d_h^2 I\right| = 0$ โดย $h = 1,2,\ldots,H$, $(H \leq p)$ และ $0 \leq d_h^2 \leq 1$

q_h คือ เวกเตอร์แฝง (Characteristic Vectors) ที่กำหนดโดยค่ารากแฝง $d_1^2, d_2^2, \ldots, d_H^2$

ค่าส่วนตกค้างบลัสที่ได้จากข้อมูลชุดหนึ่งๆ มีจำนวน $n - p$ ค่า ดังนั้น จะสมมุติ (Assume) ว่าจากตัวแบบถดถอย $Y = X\beta + \varepsilon$ มีค่าส่วนตกค้างจำนวน p ค่าของเวกเตอร์ ε ที่ไม่ได้ถูกประมาณค่า ซึ่งเรียกว่า base (Theil, 1971) โดยตัวแบบถดถอยจะอยู่ใน Partitioned Form :

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{p แถว} \\ \text{n - p แถว} \end{matrix}$$

ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ คือ $R_T = \frac{S_{TB}}{S_{TA}}$ โดย S_{TA} และ S_{TB} คือ ค่าผลรวมกำลังสองของค่าส่วนตกค้างบลัส (SSE_{BLUS}) ของค่าสังเกตกลุ่ม A และ B ตามลำดับ ซึ่งจะปฏิเสธสมมุติฐานว่าง เมื่อ $R_T \geq F_{(\alpha,\frac{n-p}{2},\frac{n-p}{2})}$

3. วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนัก กำหนดค่าถ่วงน้ำหนัก คือ $v_i = \frac{1}{\sqrt{X_i^\delta}}$ โดยตัวแบบถดถอยอยู่ในรูป $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i^\delta}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i^\delta}} + \frac{\beta_1 X_i}{\sqrt{X_i^\delta}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i^\delta}}$

พิสูจน์ กำหนดตัวแบบถดถอยอย่างง่าย $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ รูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน คือ $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 X_i^\delta$, $\sigma^2 = 1$

เมื่อถ่วงน้ำหนักด้วย $v_i = \frac{1}{\sqrt{X_i^\delta}}$ จะได้ตัวแบบถดถอยดังนี้

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i^\delta}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i^\delta}} + \frac{\beta_1 X_i}{\sqrt{X_i^\delta}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i^\delta}} \qquad \text{---------- (3)}$$

พิจารณา
$$Var\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i^\delta}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{X_i^\delta})^2} Var(\varepsilon_i)$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{X_i^\delta})^2}\sigma^2 X_i^\delta \quad , \sigma^2 = 1$$
$$= 1$$

นั่นคือ จะได้ตัวแบบถดถอยในสมการ (3) มีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนคงที่

4. วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็นกลุ่มย่อย เกิดจากการสันนิษฐานว่า

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนจะคงที่ในแต่ละกลุ่มย่อยของค่าสังเกต แต่จะไม่คงที่ระหว่างกลุ่มย่อย $Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_i^2 I$ เมื่อ i = 1, 2, ..., m, m คือ จำนวนกลุ่มย่อยทั้งหมด (Judge, 1985) โดยค่าถ่วงน้ำหนักที่ใช้ คือ $v_i = \frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}_i^2}}$ เมื่อ $\hat{\sigma}_i^2$ คือค่าประมาณความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในแต่ละกลุ่มย่อยที่ได้จากการวิเคราะห์สมการถดถอยโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งจะได้ตัวแบบถดถอย ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2}} \\ \frac{\mathbf{y}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2}} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\mathbf{y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_m^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2}} & \frac{X_1}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2}} & \frac{X_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2}} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}_m^2}} & \frac{X_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_m^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2}} \\ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2}} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_m^2}} \end{bmatrix} \quad \text{--------- (4)}$$

วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้ พิจารณาในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ โดยจำลองตัวแปรอิสระ X ที่มีการแจกแจงแบบเอกรูปที่มีค่าในช่วง 10 กับ 50, $X_i \sim U(10,50)$ ค่าความคลาดเคลื่อน ε_i ที่มีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนผันแปรตามตัวแปรอิสระ โดยขนาดความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ($|\delta|$) มีค่าเพิ่มขึ้นในรูปแบบ $\varepsilon_i \sim N(0, X_i^{\delta})$ โดยระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน คือ δ = -4.0, -3.6, ..., 0.0, 0.4, ..., 4.0 ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา คือ 10, 15, 30, 60 และ 120 และใช้ระดับนัยสำคัญสำหรับทดสอบสมมุติฐาน คือ 0.01 และ 0.05 ข้อมูลที่ได้จากการสร้างแบบจำลองจะกระทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ โดยโปรแกรมที่ใช้ในการจำลองและวิเคราะห์ข้อมูล คือ SAS เวอร์ชั่น 9.0

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบการทดสอบความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน คือ ค่าอำนาจการทดสอบ (Power of The Test) หรือ 1 - β ซึ่งหมายถึง ความน่าจะเป็นที่เกิดจากการปฏิเสธสมมุติฐานว่าง (H_0) โดยที่สมมุติฐานทางเลือกเป็นจริง P(ปฏิเสธ $H_0|H_1$ จริง) สำหรับงานวิจัยนี้ค่าประมาณอำนาจการทดสอบสามารถคำนวณได้จาก

$$\text{ค่าประมาณอำนาจการทดสอบ} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ปฏิเสธสมมุติฐานว่าง}}{1000} \quad \text{--- (4)}$$

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน คือ

$$\text{ค่าร้อยละการยอมรับสมมุติฐานว่าง} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ยอมรับสมมุติฐานว่าง}}{1000} \times 100 \quad \text{--- (5)}$$

ผลการวิจัย

ผลการเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ และของธิล จำแนกตามระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน กับตัวอย่างขนาดต่างๆ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 ทั้งนี้แบ่งรูปแบบความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อนออกเป็น 2 รูปแบบ คือ

รูปแบบที่ 1 ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น เมื่อค่าตัวแปรอิสระ X เพิ่มขึ้น (δ = 0.4, 0.8, ..., 4.0)

รูปแบบที่ 2 ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลง เมื่อค่าตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น (δ = -4.0, -3.6, ..., -0.4)

ผลการวิจัยนำเสนอในภาพที่ 1 (ก) - (จ) แสดงค่าประมาณอำนาจการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ และธิล จำแนกตามระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 15, 30, 60 และ 120 ตามลำดับ มีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้สัญลักษณ์

GQ หมายถึง การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์

TH หมายถึง การทดสอบของธิล

Power of the Test (Estimate)

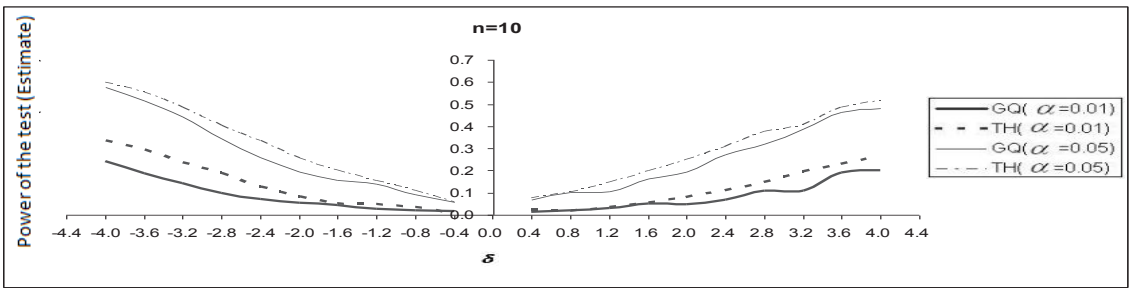
หมายถึง ค่าประมาณอำนาจการทดสอบ

α หมายถึง ระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐาน

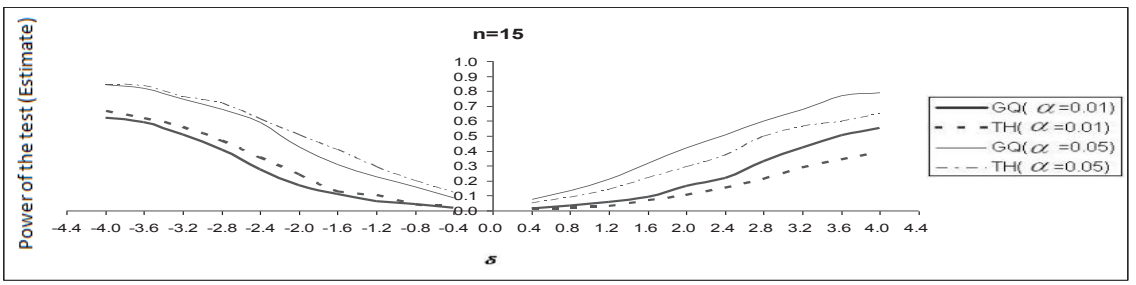
δ หมายถึง ระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

n หมายถึง ขนาดตัวอย่าง

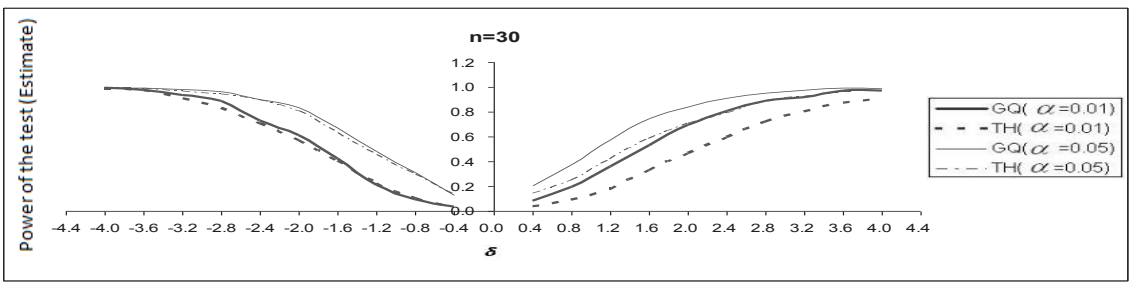
สำหรับการเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ และของธิล พบว่า ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 ไม่ว่ารูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูปแบบที่ 1 หรือรูปแบบที่ 2 จะเห็นว่า ค่าประมาณอำนาจการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ และของธิล มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น เมื่อขนาดความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนและขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น



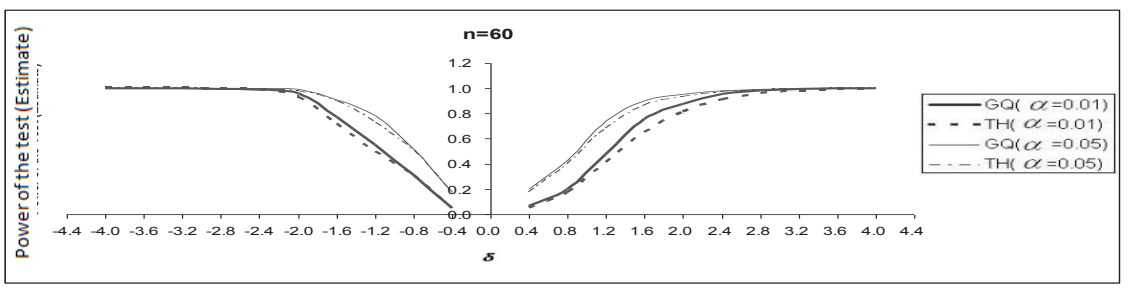
(ก) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10



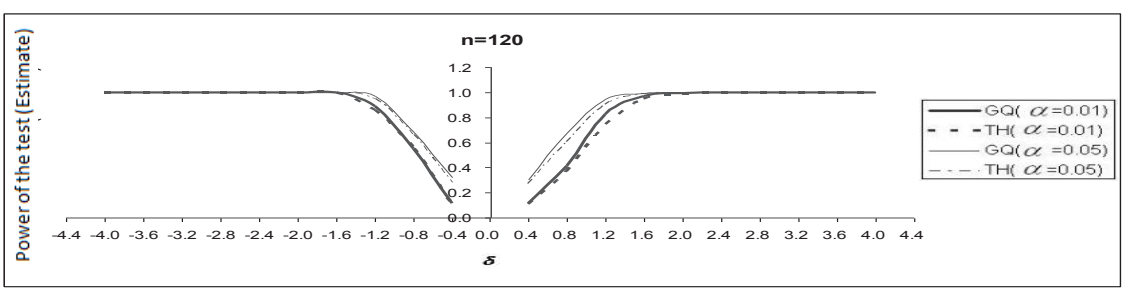
(ข) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15



(ค) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30



(ง) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60



(จ) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 120

ภาพที่ 1 ค่าประมาณอำนาจการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ และธิล

จากผลการวิจัยข้างต้น พบว่า ค่าประมาณอำนาจการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 ให้ข้อสรุปเป็นไปในทิศทางเดียวกัน ดังนั้น ในส่วนการเปรียบเทียบวิธีแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน ผู้วิจัยจึงเลือกใช้การทดสอบสมมุติฐานเฉพาะที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เพียงระดับเดียว ซึ่งจะเลือกใช้การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ หรือการทดสอบของธิล โดยการพิจารณาจากค่าประมาณอำนาจการทดสอบที่ดีที่สุด กล่าวคือ กรณีรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูปแบบที่ 1 จะเลือกใช้การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ สำหรับทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นเมื่อตัวอย่างมีขนาด 10 จะเลือกใช้การทดสอบของธิล ส่วนกรณีรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูปแบบที่ 2 จะเลือกใช้การทดสอบของธิล เมื่อตัวอย่างมีขนาด 10 และ 15 และเลือกการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ เมื่อตัวอย่างมีขนาด 30, 60 และ 120

ผลการวิจัยนำเสนอในภาพที่ 2 (ก) - (จ) แสดงค่าร้อยละการยอมรับสมมุติฐานว่าง จำแนกตามระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 15, 30, 60 และ 120 ตามลำดับ มีรายละเอียดดังนี้

กำหนดสัญลักษณ์

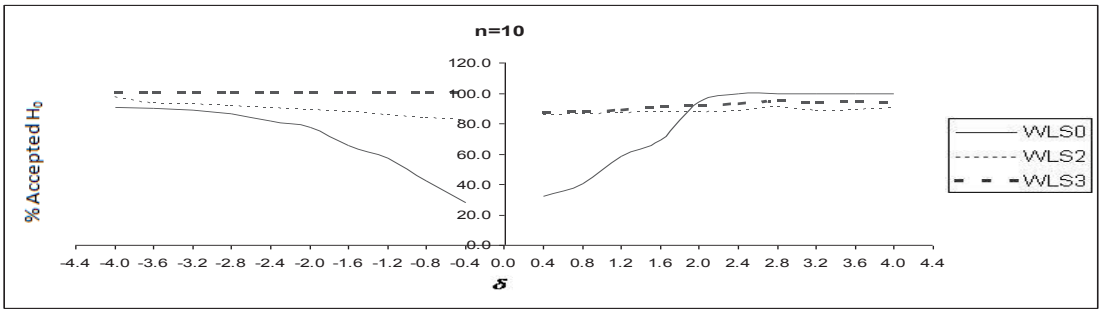
WLS0	หมายถึง	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนัก
WLS2	หมายถึง	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักกรณีไม่ทราบค่าน้ำหนัก โดยการประมาณค่าน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม
WLS3	หมายถึง	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักกรณีไม่ทราบค่าน้ำหนัก โดยการประมาณค่าน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม
WLS5	หมายถึง	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักกรณีไม่ทราบค่าน้ำหนัก โดยการประมาณค่าน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็น 5 กลุ่ม
% Accepted H_0	หมายถึง	ค่าร้อยละการยอมรับสมมุติฐานว่างหลังแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน

สำหรับการเปรียบเทียบวิธีแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน เมื่อเปรียบเทียบระหว่างวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนัก และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักออกเป็นกลุ่มย่อยที่สามารถแก้ปัญหาได้ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์ พบว่า สำหรับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในรูปแบบที่ 1 กรณีตัวอย่างที่มีขนาด 10, 15 และ 30 การถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนัก มีค่าร้อยละการยอมรับสมมุติฐานว่างสูงกว่าการถ่วงน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักออกเป็น 3 กลุ่มเพียงเล็กน้อยเมื่อ $2.0 < \delta \leq 4.0$ แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาด 60 และ 120 การถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนักมีแนวโน้มในการแก้ปัญหาได้ดีใกล้เคียงกับการถ่วงน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักออกเป็น 5 กลุ่มเมื่อ $\delta > 1.6$ สำหรับตัวอย่างขนาด 60 และเมื่อ $\delta > 0.8$ สำหรับตัวอย่างที่มีขนาด 120 ในขณะที่เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูปแบบที่ 2 พบว่า การถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนักไม่สามารถแก้ปัญหาได้ดีเท่ากับการถ่วงน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักออกเป็นกลุ่มย่อยในทุกระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนและขนาดตัวอย่าง

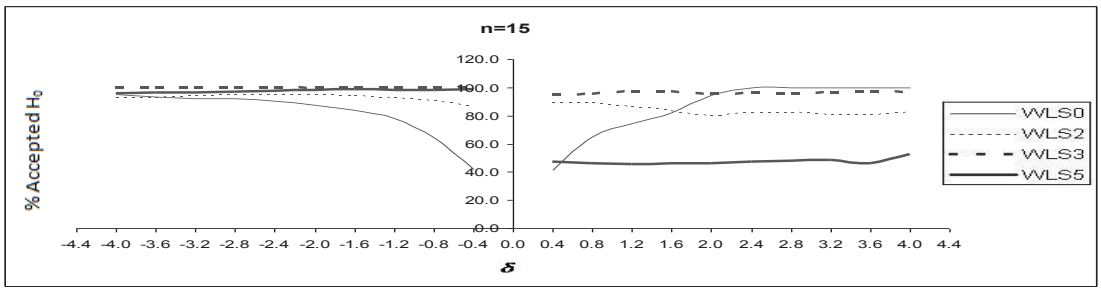
สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

การเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน พบว่า การทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ ให้ค่าประมาณอำนาจการทดสอบสูงกว่าการทดสอบของธิลเกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ค่าตัวแปรอิสระและรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก (n = 10) และกรณีที่รูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลง ค่าตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น เมื่อตัวอย่างมีขนาด 10 และ 15 การทดสอบของธิลจะดีกว่าการทดสอบของโกลด์เฟลด์-ควอนท์ ในทุกระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนและระดับนัยสำคัญ โดยการทดสอบทั้ง 2 จะมีค่าประมาณอำนาจการทดสอบสูงใกล้เคียงกันเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (n = 60, 120) และขนาดความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่ามากกว่า 2.8 ถึง 4.0

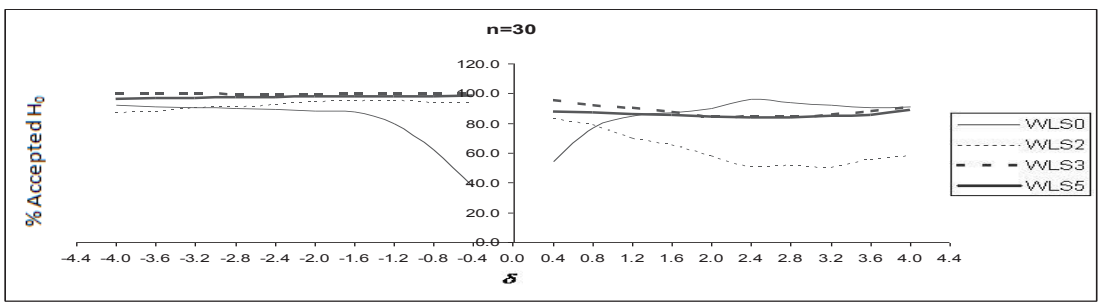
การเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน สรุปได้ว่าทุกระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อไม่ทราบค่าน้ำหนักโดยการประมาณค่าน้ำหนักจากข้อมูลที่แบ่งออกเป็น 3 และ 5 กลุ่ม สามารถแก้ปัญหาได้ดี ทั้งนี้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักเมื่อทราบค่าน้ำหนักและไม่ทราบค่าน้ำหนักสามารถแก้ปัญหาได้ดีใกล้เคียงกัน ในกรณีค่าของตัวแปรอิสระและรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นที่ระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่ามากกว่า 1.6 ถึง 4.0 เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กถึงปานกลาง (n =10, 15, 30) และในทุกระดับความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่



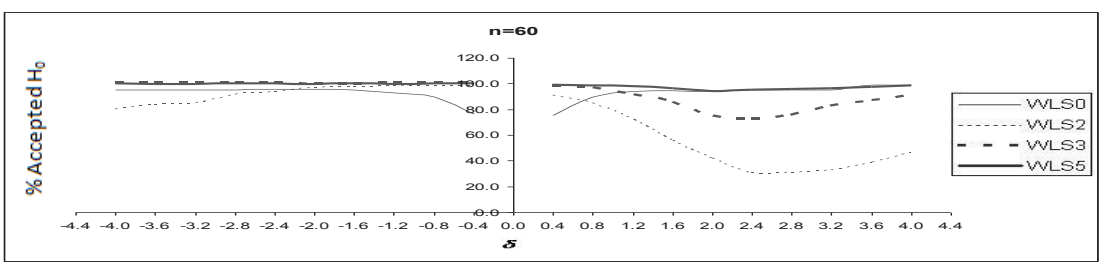
(ก) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10



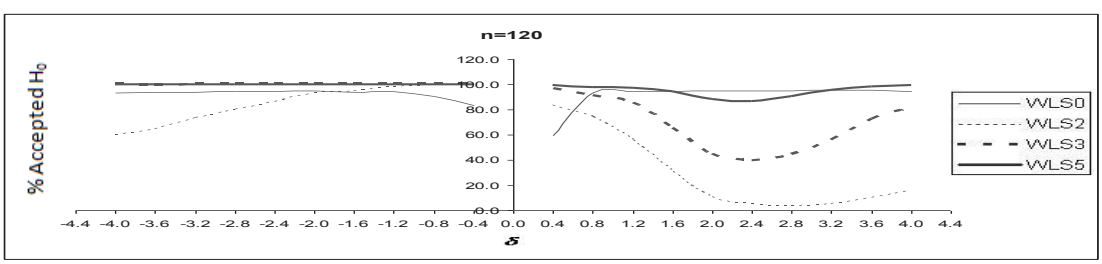
(ข) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15



(ค) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30



(ง) ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 60



(จ) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 120

ภาพที่ 2 ค่าร้อยละการยอมรับสมมุติฐานหลัก

เพื่อความสะดวกในการเลือกใช้การทดสอบและวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อนจึงขอสรุปการเลือกใช้วิธีการทดสอบและวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน แสดงในรูปแบบของตารางที่ 1 ถึง 4 ดังนี้

ตารางที่ 1 สรุปวิธีการทดสอบความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น ค่าตัวแปรอิสระ X เพิ่มขึ้น

ขนาดตัวอย่าง		**ขนาดความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\lvert\delta\rvert$**		
		ต่ำ $(0.4 \le \lvert\delta\rvert \le 1.6)$	**ปานกลาง** $(1.6 < \lvert\delta\rvert \le 2.8)$	**สูง** $(2.8 < \lvert\delta\rvert \le 4.0)$
เล็ก	**10**	TH	TH	TH
ปานกลาง	**15**	GQ	GQ	GQ
	30	GQ	GQ	GQ
ใหญ่	**60**	GQ	GQ	GQ เมื่อ $\lvert\delta\rvert < 3.2$ GQ หรือ TH เมื่อ $\lvert\delta\rvert \ge 3.2$
	120	GQ	GQ เมื่อ $\lvert\delta\rvert < 2.0$ GQ หรือ TH เมื่อ $\lvert\delta\rvert \ge 2.0$	GQ หรือ TH

ตารางที่ 2 สรุปวิธีการทดสอบความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลง ค่าตัวแปรอิสระ X เพิ่มขึ้น

ขนาดตัวอย่าง		**ขนาดความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\lvert\delta\rvert$**		
		ต่ำ $(0.4 \le \lvert\delta\rvert \le 1.6)$	**ปานกลาง** $(1.6 < \lvert\delta\rvert \le 2.8)$	**สูง** $(2.8 < \lvert\delta\rvert \le 4.0)$
เล็ก	**10**	TH	TH	TH
ปานกลาง	**15**	TH	TH	TH
	30	GQ	GQ	GQ
ใหญ่	**60**	GQ	GQ	GQ เมื่อ $\lvert\delta\rvert < 3.2$ GQ หรือ TH เมื่อ $\lvert\delta\rvert \ge 3.2$
	120	GQ	GQ เมื่อ $\lvert\delta\rvert < 2.0$ GQ หรือ TH เมื่อ $\lvert\delta\rvert \ge 2.0$	GQ หรือ TH

ตารางที่ 3 สรุปวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น ค่าตัวแปรอิสระ X เพิ่มขึ้น

ขนาดตัวอย่าง		ขนาดความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\|\delta\|$		
		ต่ำ ($0.4 \le \|\delta\| \le 1.6$)	ปานกลาง ($1.6 < \|\delta\| \le 2.8$)	สูง ($2.8 < \|\delta\| \le 4.0$)
เล็ก	10	WLS3	WLS3 เมื่อ $\|\delta\| < 2.0$ WLS3 หรือ WLS0 เมื่อ $\|\delta\| \ge 2.0$	WLS3 หรือ WLS0
ปานกลาง	15	WLS3	WLS3 เมื่อ $\|\delta\| < 2.0$ WLS3 หรือ WLS0 เมื่อ $\|\delta\| \ge 2.0$	WLS3 หรือ WLS0
	30	WLS3	WLS3 เมื่อ $\|\delta\| < 2.0$ WLS3 หรือ WLS0 เมื่อ $\|\delta\| \ge 2.0$	WLS3 หรือ WLS0
ใหญ่	60	WLS5	WLS5 หรือ WLS0	WLS5 หรือ WLS0
	120	WLS5, WLS5 หรือ WLS0 เมื่อ $\|\delta\| \ge 0.8$	WLS5 หรือ WLS0	WLS5 หรือ WLS0

ตารางที่ 4 สรุปวิธีการแก้ปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ของความคลาดเคลื่อน เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลง ค่าตัวแปรอิสระ X เพิ่มขึ้น

ขนาดตัวอย่าง		ขนาดความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\|\delta\|$		
		ต่ำ ($0.4 \le \|\delta\| \le 1.6$)	ปานกลาง ($1.6 < \|\delta\| \le 2.8$)	สูง ($2.8 < \|\delta\| \le 4.0$)
เล็ก	10	WLS3	WLS3	WLS3
ปานกลาง	15	WLS3	WLS3	WLS3
	30	WLS3	WLS3	WLS3
ใหญ่	60	WLS3 หรือ WLS5	WLS3 หรือ WLS5	WLS3 หรือ WLS5
	120	WLS3 หรือ WLS5	WLS3 หรือ WLS5	WLS3 หรือ WLS5

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ ที่ช่วยให้คำปรึกษาตลอดจนแนวคิดที่เป็นประโยชน์สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Goldfeld, S.M. & Quandt, R.E. (1965). Some Tests for Homoscedasticity. *Journal of The American Statistical Association, 60*(310), 539-547.

Griffiths, W.E., Hill, C.R., Judge, G.G., Lee T., & Lutkepohl, H. (1985). *The Theory and Practice of Econometrics*. 2nd ed. New York: Wiley.

Gujarati, D.N. (2006). *Essentials of Econometrics*. 3rd ed. Boston.Mass: Mcgraw-Hill/Irwin.

Koerts, J. (1967). Some Further Notes on Disturbance Estimates in Regression Analysis. *Journal of The American Statistical Association, 62*(317), 169-183.

Magnus, J.R. and Sinha, A.K. (2005). On Theil's Errors. *Econometrics Journal, 8*, 39-54.

Ramanathan, R. (2008). *Introductory Econometrics with Applications*. 5th ed. Fort Worth: Harcourt College Publishers.

Theil, H. (1965). The Analysis of Disturbance in Regression Analysis. *Journal of The American Statistical Association, 60*(312), 1067-1079.

Theil, H. (1968). A Simplification of the Blus Procedure for Analyzing Regression Disturbances. *Journal of The American Statistical Association, 63* (321), 242-251.

Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics*. Amsterdam: North-Holland.