วิธีการประมาณค่าแบบซ้ำสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาเชิงดุลยภาพบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

Iterative Approximations Methods for Solving Fixed Point Problems, Variational Inequality Problems and Equilibrium Problems in Hilbert Spaces

รัตนาพร วังคีรี*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

Rattanaporn Wangkeeree*

Department of Mathematic, Faculty of Science, Naresuan University.

บทคัดย่อ

จุดประสงค์ของบทความนี้เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำ สำหรับการค้นหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาเชิงดุลยภาพสำหรับการส่งแบบไม่ขยาย และ การส่งไม่เชิงเส้นแบบอื่นๆ ในปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง

คำสำคัญ : วิธีการประมาณค่าแบบซ้ำ ปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาเชิงดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึง ปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง

Abstract

The objective of this article is to study iterative approximation methods for finding the common elements of fixed point problems, variational inequality problems and equilibrium problems for nonexpansive mappings and nonlinear mappings in real Hilbert spaces.

Keywords : Iterative approximation methods, Variational inequality problems, Equilibrium problem, Fixed point problems, Real Hilbert spaces,

*E-mail: rattanapornw@nu.ac.th

บทนำ

วิธีการประมาณค่าแบบซ้ำของจุดตรึง (iterative approximation method of fixed point) นับเป็นแขนงที่สำคัญแขนงหนึ่งในสาขาของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional analysis) ในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและวิจัยในแขนงดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง การคิดค้นเพื่อให้ได้มาซึ่งวิธีการประมาณค่าแบบต่างๆ ที่ใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบต่างๆ หรือ การประมาณค่าผลเฉลยของอสมการต่างๆ นั้นซึ่งเป็นหัวข้อที่มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากให้ความสนใจศึกษา และสืบเนื่องจากมีนักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งที่ได้ศึกษาการมีผลเฉลยของจุดตรึงของการส่งแบบต่างๆ และคำตอบของอสมการต่างๆ ดังนั้นปัญหาที่น่าสนใจต่อไปก็คือ เราจะค้นหาผลเฉลยนั้นได้อย่างไร คำถามดังกล่าวนี้ก็ทำให้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากสนใจที่จะศึกษาโดยได้คิดค้นระเบียบวิธีทำซ้ำของจุดตรึง (fixed point iterations) สำหรับการส่งแบบต่างๆ หรือ วิธีการประมาณค่าแบบซ้ำ (iterative approximation methods) เพื่อใช้ในการหาผลเฉลย และการประมาณค่าผลเฉลยให้กับการส่งต่างๆ เหล่านั้น พร้อมทั้งนำผลที่ได้ไปประยุกต์ใช้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาอสมการการแปรผัน (variational inequality problem (VIP)) ปัญหาเชิงดุลยภาพ (equilibrium problems (EP)) ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (optimizations problems) และ ปัญหาค่าน้อยที่สุด (minimizations problems) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งองค์ความรู้ใหม่ที่ได้จากการศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับปัญหาดังกล่าวนั้นเป็นแบบจำลองพื้นฐานและเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับทั้งปัญหาเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น (linear and nonlinear problems) ซึ่งปัญหาทั้งสองดังกล่าวถือเป็นปัญหาหลักในการศึกษาทั้งในแง่ของวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ อย่างเช่นทางด้านกลศาสตร์ (mechanics) ฟิสิกส์ (physics) การหาค่าเหมาะที่สุดและการควบคุม (optimization and control) การเงิน (finance) นิเวศวิทยา (ecology) เครือข่าย (network) กำหนดการไม่เชิงเส้น (nonlinear programming) ทฤษฎีเกมส์ (game theory) เศรษฐศาสตร์และการเคลื่อนย้ายเชิงดุลยภาพ (economics and transportation equilibrium) วิทยาศาสตร์เชิงวิศวกรรมศาสตร์ (engineering science) เป็นต้น

การศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับอสมการการแปรผันนั้น ต้องอาศัยเทคนิคความรู้ที่ผสมผสานกันของการวิเคราะห์เชิงคอนเวกซ์ (convex analysis) การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional analysis) และการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) มาประกอบกันเพื่อให้ได้ซึ่งผลเฉลยของอสมการการแปรผัน ซึ่งวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ การคิดค้นวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำโดยใช้เทคนิคภาพฉาย (projection technique) (ดูจาก Baiocchi & Capelo, 1984; Blum & Oettli, 1994; Noor, 2010; Noor, 2007) ซึ่งจากการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการดังกล่าว ทำให้นักคณิตศาสตร์ได้มองเห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึง (fixed point problem) นอกจากนั้นแล้ว ในปี 2005 Combettes และ Hirstoaga ได้คิดค้นวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำเพื่อการหาผลเฉลยของปัญหาเชิงดุลยภาพ ซึ่งวางนัยทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผันโดยใช้ปัญหาจุดตรึงมาช่วยในการแก้ไขปัญหาดังกล่าว อีกทั้งปัญหาเชิงดุลยภาพนี้ถือเป็นเครื่องมือสำคัญยิ่งในการแก้ปัญหาในทางฟิสิกส์ หรือแม้กระทั่งในทางเศรษฐศาสตร์ ซึ่งสามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิง (Blum & Oettli, 1994; Flam & Antipin, 1997; Moudafi & Thera, 1999) เป็นผลให้ต่อมาในปี 2008 Peng และ Yao ได้ศึกษาและคิดค้นวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำเพื่อหาผลเฉลยของ ปัญหาเชิงดุลยภาพแบบผสมวางนัยทั่วไป (GMEP) และ ปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า การศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำสำหรับแก้ไขปัญหาอสมการการแปรผัน และ ปัญหาเชิงดุลยภาพสำหรับการส่งแบบไม่ขยายนั้นนับเป็นหัวข้อการศึกษาที่น่าสนใจและมีประโยชน์เป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆ เพื่อเป็นองค์ความรู้ใหม่นั้นนับว่ามีประโยชน์ต่อทางวิชาการและการพัฒนาประเทศเป็นอย่างมาก และเป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎี และ องค์ความรู้ใหม่ๆ ที่เกิดจากการวิจัยนั้น นอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขา และแขนงต่างๆ นั้นแล้ว บางครั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐานซึ่งเป็นการวิจัยพื้นฐาน เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติต่อไป

นิยาม และ ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงบทนิยามและความรู้พื้นฐานที่สำคัญ ในการศึกษาเกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำเพื่อใช้ในการค้นหาผลเฉลยร่วมของปัญหาเชิงดุลยภาพ ปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่เชิงเส้นแบบต่างๆ

บทนิยาม 1 กำหนดให้ $(H,\langle\ \rangle)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง และ C เป็นเซตย่อยของ H ซึ่งเป็นเซตปิด (closed) และคอนเวกซ์ (convex) เราจะกล่าวว่าการส่ง $A : C \to H$ เป็น *การส่งทางเดียว (monotone mapping)* ถ้า $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x,y \in C$

เมื่อสัญลักษณ์ ⟨ , ⟩ แทน ผลคูณภายใน (inner product) บนปริภูมิฮิลเบิร์ต

บทนิยาม 2 กำหนดให้ $(H,\langle\ \rangle)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง และ C เป็นเซตย่อยของ H ซึ่งเป็นเซตปิดและคอนเวกซ์ และให้ $A : C \rightarrow H$ เป็นการส่งไม่เชิงเส้น (nonlinear mapping) *ปัญหาอสมการการแปรผัน (variational inequality problem (VI))* หมายถึง การหาจุด $u \in C$ ซึ่งทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

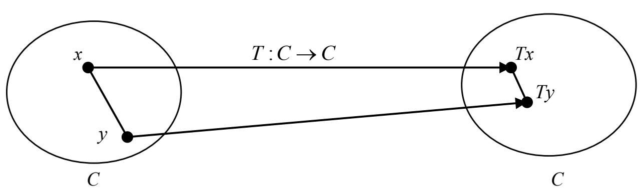
$$\langle Au, v-u\rangle \geq 0 \text{ สำหรับทุกๆ } v \in C \tag{1}$$

เซตคำตอบของปัญหาอสมการการแปรผันจะถูกเขียนแทนด้วย $VI(C,A)$ นั่นคือ $VI(C,A)=\{u\in C:\langle Au, v-u\rangle \geq 0,\quad \forall v\in C\}$

บทนิยาม 3 กำหนดให้ $(H,\langle\ \rangle)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง และ C เป็นเซตย่อยของ H ซึ่งเป็นเซตปิดและคอนเวกซ์ เราจะกล่าวว่า การส่ง $A : C \rightarrow H$ เป็น *การส่งทางเดียวอย่างเข้มผกผันที่มีค่าสัมประสิทธิ์* α (α-inverse-strongly monotone mapping) ถ้ามีจำนวนจริง $\alpha > 0$ ซึ่งทำให้ $\langle Ax-Ay, x-y\rangle \geq \alpha\|Ax-Ay\|^2$ สำหรับทุกๆ $x,y \in C$

เมื่อ $\|\ \|$ แทนฟังก์ชันนอร์ม (norm) บนปริภูมิฮิลเบิร์ต

บทนิยาม 4 กำหนดให้ $(X,\|\ \|)$ เป็นปริภูมินอร์ม และ C เป็นเซตย่อยของ H จะกล่าวว่า การส่ง $T : C \rightarrow C$ เป็น *การส่งแบบไม่ขยาย* (nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$ สำหรับทุกๆ $x,y \in C$

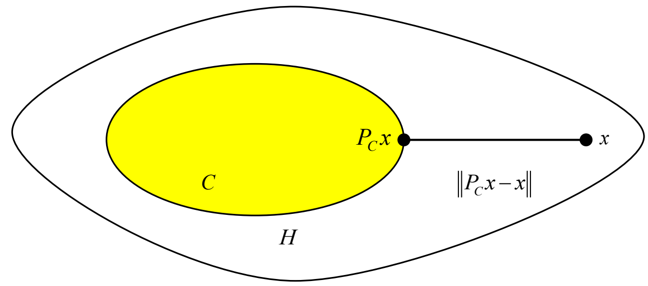


และ ให้ $F(T)$ แทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของการส่ง T นั่นคือ $F(T)=\{x\in C: Tx=x\}$

บทนิยาม 5 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \rightarrow X$ จะกล่าวว่า T เป็นการส่งหดตัว (contraction mapping) ถ้ามีจำนวนจริง k ซึ่ง $0 \leq k < 1$ และทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง $d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$ สำหรับทุกๆ $x,y \in X$

บทนิยาม 6 กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง และ C เป็นเซตย่อยของ H ซึ่งเป็นเซตปิดและคอนเวกซ์ เราจะกล่าวว่า การส่ง $P_C : H \rightarrow C$ เป็น *ภาพฉายระยะทาง* (metric projection) ถ้าสำหรับทุกๆ $x \in X$ จะมี $P_c x \in C$ ตัวเดียวเท่านั้นซึ่งทำให้ $\|x-P_C x\| \leq \|x-y\|$ สำหรับทุกๆ $y \in C$

ข้อสังเกต 7 จากนิยามดังกล่าวจะเห็นได้ว่า u เป็นคำตอบของอสมการการแปรผันในสมการที่ (1) ก็ต่อเมื่อ $u=P_C(u-\lambda Au)$



เมื่อ $\lambda > 0$ และ P_C เป็นภาพฉายระยะทาง นั่นแสดงให้เห็นว่าคำตอบของปัญหาอสมการการแปรผัน (1) คือ จุดตรึงของการส่ง $P_C(I-\lambda A)$ เมื่อ I เป็นการส่งเอกลักษณ์

บทนิยาม 8 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิฮิลเบิร์ต H จะกล่าวว่า ลำดับ $\{x_n\}$ เป็น *ลำดับลู่เข้าอย่างอ่อน* (weakly convergent) สู่จุด $x \in H$ ถ้า $\langle x_n, y\rangle \rightarrow \langle x, y\rangle$ สำหรับทุกๆ $y \in H$ หรือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x_n \xrightarrow{w} x$

นอกจากปัญหาที่ได้กล่าวไปแล้ว อีกหนึ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่สนใจของนักคณิตศาสตร์ คือ ปัญหาเชิงดุลยภาพ (equilibrium problems (EP)) ซึ่งวางนัยทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน โดยนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 9 กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง และ C เป็นเซตย่อยของ H ซึ่งเป็นเซตปิด และคอนเวกซ์ กำหนดให้ $F: C\times C \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันโดเมนเชิงคู่ (bifunction) *ปัญหาเชิงดุลยภาพ* หมายถึง การหาค่าของ $x \in C$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$F(x,y) \geq 0 \text{ สำหรับทุกๆ } y \in C \tag{2}$$

เซตคำตอบของปัญหาเชิงดุลยภาพ (2) จะถูกเขียนแทนด้วย $EP(F)$ นั่นคือ $EP(F)=\{x\in C: F(x,y)\geq 0, \forall y \in C\}$

ตัวอย่าง 10 กำหนดให้ $C=[0,1]\times[0,1]$ และนิยามการส่งโดเมนเชิงคู่ $F: C\times C \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $F(x,y)=(y_1-y_2)^2-(x_1-x_2)^2$ สำหรับทุกๆ $x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2) \in C$ ดังนั้นเซตคำตอบของปัญหาเชิงดุลยภาพ คือ $EP(F)=\{x=(x_1,x_2)\in C: x_1=x_2\}$

ตัวอย่าง 11 กำหนดให้ $C=[0,1]\times[0,1]$ และนิยามการส่งโดเมนเชิงคู่ $F: C\times C \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$F(x,y)=(x_1+x_2-1)(y_1-x_1)+(x_1+x_2-1)(y_2-x_2)$$

สำหรับทุกๆ $x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2) \in C$ ดังนั้นเซตคำตอบของปัญหาเชิงดุลยภาพ คือ $EP(F)=\{x=(x_1,x_2)\in C: x_1+x_2=1\}$

จากบทนิยาม 9 ถ้ากำหนดการส่ง $T: C \rightarrow H$ ให้ $F(x,y)=\langle Tx, y-x\rangle$ สำหรับทุกๆ $x,y \in C$ แล้วจะได้ว่า $z\in EP(F)$ ก็ต่อเมื่อ $\langle Tz, y-z\rangle \geq 0, \forall y\in C$ นั่นแสดงให้เห็นว่าคำตอบของปัญหาเชิงดุลยภาพสามารถใช้ในการแก้ไขบางปัญหาอสมการการแปรผัน

นอกจากนี้แล้ว จะเห็นว่าปัญหาต่างๆ ในทางฟิสิกส์ หรือในทางเศรษฐศาสตร์บางอย่างสามารถแปลงเป็นสมการ หรืออสมการให้อยู่ในรูปอสมการ (2) ได้ ดังนั้น การค้นหาผลเฉลย หรือการประมาณค่าของปัญหาเชิงดุลยภาพ (2) นั้นถือเป็นการแก้ไขปัญหาในทางฟิสิกส์ หรือในทางเศรษฐศาสตร์ได้อีกทางหนึ่ง ซึ่งสามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิง (Blum & Oettli, 1994; Flam & Antipin, 1997)

เนื่องจากการศึกษาก่อนหน้านี้ได้ศึกษาวิธีการประมาณค่าสำหรับหาผลเฉลยของจุดตรึงเพียงอย่างเดียวนั่นก็คือแก้ปัญหาได้เพียงด้านเดียวดังนั้นนักวิจัยทั้งหลายจึงได้พยายามศึกษาหาแนวทางในการที่จะทำให้วิธีการประมาณค่านั้นสามารถที่จะหาผลเฉลยเพื่อแก้ปัญหาทางด้านต่างๆ ไปพร้อมๆ กันหลายๆ ด้านซึ่งเป็นประโยชน์มากกว่าการแก้ไขปัญหาไปทีละด้านซึ่งกว่าจะแก้ปัญหาได้แต่ละด้านก็ให้แนวคิดที่ต่างกันและใช้เวลานานด้วย ดังนั้นจึงมีนักวิจัยรุ่นใหม่ได้พยายามนำปัญหาต่างๆ เหล่านั้นมาศึกษาไปพร้อมๆ กันและแก้ปัญหาไปพร้อมๆ กันซึ่งจะเกิดประโยชน์หลายๆ ด้านพร้อมกันและแก้ปัญหาได้หลายๆ ศาสตร์ด้วย และยังประหยัดเวลาและงบประมาณในการคิดค้นหาแนวทางในการแก้ปัญหาต่างๆ ด้วย โดยในที่นี้มีการศึกษาร่วมกันกับปัญหาต่างๆ แยกได้ดังต่อไปนี้

วิธีการประมาณค่าสำหรับการค้นหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน

ในปี ค.ศ. 2003 Takahashi และ Toyoda ได้คิดค้นวิธีทำซ้ำต่อไปนี้ เพื่อค้นหาผลเฉลยร่วมระหว่างจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย และ ผลเฉลยของอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง ดังทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 12 (Takahashi & Toyoda, 2003) ให้ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ซึ่งเป็นเซตปิด และคอนเวกซ์ และ $S: C \longrightarrow C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C,A) \neq \varnothing$ ให้ $P_C : H \longrightarrow C$ เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \longrightarrow H$ เป็นการส่งทางเดียวอย่างเข้มผกผันที่มีค่าสัมประสิทธิ์ α โดยที่ $\alpha > 0$ กำหนดให้ $x_0 \in C$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ โดย

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

สำหรับทุกๆ $n = 0,1,2,3,...$ เมื่อลำดับ $\{\alpha_n\} \subset [c,d]$ สำหรับบาง $c,d \in (0,1)$ และลำดับ $\{\lambda_n\} \subset [a,b]$ สำหรับบาง $a,b \in (0,2\alpha)$ ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนสู่สมาชิกร่วมของ $F(S) \cap VI(C,A)$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2005 Iiduka และ Takahashi ต้องการทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างเข้มสู่สมาชิกร่วมของ $F(S) \cap VI(C,A)$ จึงได้กำหนดวิธีการทำซ้ำแบบใหม่ดังนี้

ทฤษฎีบท 13 ให้ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ซึ่งเป็นเซตปิดและคอนเวกซ์ และ $S: C \longrightarrow C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C,A) \neq \varnothing$ ให้ $P_C : H \longrightarrow C$ เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \longrightarrow H$ เป็นการส่งทางเดียวอย่างเข้มผกผันที่มีค่าสัมประสิทธิ์ α และกำหนดให้ $x_1 = u \in C$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ โดย

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

สำหรับทุกๆ n=1,2,3 เมื่อลำดับ $\{\lambda_n\} \subset [0,2\alpha]$ โดยที่ $\{\lambda_n\} \subset [a,b]$ สำหรับบาง $a,b \in (0,2\alpha)$ และลำดับ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ และสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้คือ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| < \infty$ ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่สมาชิกร่วมของ $F(S) \cap VI(C,A)$ ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

นอกจากนั้นแล้วในปี 2007 Yao และ Yao (Yao & Yao, 2007) ได้แนะนำวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำเพื่อหาสมาชิกร่วมของ $F(S) \cap VI(C,A)$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 14 (Yao & Yao, 2007) ให้ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ซึ่งเป็นเซตปิด และคอนเวกซ์ และ $A : C \longrightarrow H$ เป็นการส่งทางเดียวอย่างเข้มผกผันที่มีค่าสัมประสิทธิ์ α ให้ $P_C : H \longrightarrow C$ เป็นภาพฉายระยะทาง และ $S : C \longrightarrow C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายซึ่ง $F(S) \cap VI(C,A) \neq \varnothing$

กำหนดให้ $x_1 = u \in C$ นิยาม ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ โดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n) \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n SP_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \qquad (3)$$

สำหรับทุกๆ n = 0,1,2,3,... เมื่อ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,1]$ และลำดับ $\{\lambda_n\} \subset [a,b]$ สำหรับบาง a,b โดยที่ $0 < a < b < 2\alpha$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$,

(3) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$

(4) $\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ นิยามโดย (3) ลู่เข้าอย่างเข้มสู่สมาชิกร่วมของ $F(S) \cap VI(C,A)$ ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

วิธีการประมาณค่า สำหรับการค้นหาผลเฉลยร่วมของปัญหาเชิงดุลยภาพ และ ปัญหาจุดตรึง

สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาเชิงดุลยภาพ สำหรับการส่งโดเมนเชิงคู่ $F: C \times C \to \mathbb{R}$ เราจะกำหนดให้การส่ง F สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(A1) $F(x,x) = 0$ ทุกๆ $x \in C$

(A2) F เป็นฟังก์ชันทางเดียวนั่น คือ $F(x,y)+F(y,x) \leq 0$ ทุกๆ $x,y \in C$

(A3) $\lim_{t\to 0} F\langle tz+(1-t)x, y\rangle \leq F(x,y)$ สำหรับทุกๆ $x,y,z \in C$

(A4) สำหรับทุกๆ $x \in C$ จะได้ว่าฟังก์ชัน $y \mapsto F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ ฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง (convex and lower semicontinuous function)

โดยในปี ค.ศ. 2005 Combettes และ Hirstoaga ได้เริ่มต้นศึกษาและใช้วิธีการประมาณค่าแบบซ้ำในการประมาณค่าที่ดีที่สุดเพื่อนำไปหาผลเฉลยให้กับปัญหาเชิงดุลยภาพ และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างเข้มเพื่อค้นหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึงและปัญหาเชิงดุลยภาพ ต่อมาในปี 2007 S. Takahashi และ W. Takahashi ได้คิดค้น และ นำเสนอวิธีการประมาณค่าแบบหนืด (viscosity approximation method) เพื่อการค้นหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึง และ ปัญหาเชิงดุลยภาพดังกล่าวในปริภูมิฮิลเบิร์ตดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 15 กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ซึ่งเป็นเซตปิด และคอนเวกซ์ โดยที่ $F: C\times C \to \mathbb{R}$ เป็นการส่งโดเมนเชิงคู่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A4) และ $S : C \to H$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายโดยที่ $F(S)\cap EP(F) \neq \varnothing$ ให้ $f : H \to H$ เป็นการส่งหดตัว กำหนดให้ $x_1 \in C$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n, u_n-x_n\rangle, \forall y\in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Su_n \end{cases} \tag{4}$$

สำหรับทุกๆ $n = 0,1,2,3,...$ เมื่อลำดับ $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$ และลำดับ $\{r_n\}\subset(0,\infty)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < \infty$

(2) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n| < \infty$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z \in F(S)\cap EP(F)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap EP(F)}f(z)$

หมายเหตุ : เราเรียกวิธีการประมาณค่า (4) ***ว่า วิธีการประมาณค่าแบบหนืด*** (viscosity approximation method)

วิธีการประมาณค่า สำหรับการค้นหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผัน และ ปัญหาเชิงดุลยภาพ

เพื่อค้นหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผัน และ ปัญหาเชิงดุลยภาพ ในปี ค.ศ. 2008 Su และคณะ (Su *et al.*, 2008) ได้สร้างวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมระหว่างเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย $F(S)$ เซตผลเฉลยของอสมการการแปรผัน $VI(C,A)$ และ เซตผลเฉลยของปัญหาเชิงดุลยภาพ $EP(F)$ นั่นก็คือ $F(S)\cap EP(F)\cap VI(C,A)$ ในปริภูมิฮิลเบิร์ตดังนี้

ทฤษฎีบท 16 (Su *et al.*, 2008) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ให้ $F: C\times C \to \mathbb{R}$ เป็นการส่งโดเมนเชิงคู่ที่สอดคล้องเงื่อนไข (A1)-(A4) และ $S : C \to H$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ให้ $A : C \to H$ เป็นการส่งทางเดียวอย่างเข้มผกผันที่มีค่าสัมประสิทธ์ α โดยที่ $F(S)\cap EP(F)\cap VI(C,A) \neq \varnothing$ กำหนดให้ $f : H \to H$ เป็นการหดตัว (contraction) และ $P_C : H \to C$ เป็นภาพฉายระยะทางและให้ $x_1 \in H$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n, u_n-x_n\rangle, \forall y\in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)SP_c(u_n-\lambda_n Au_n) \end{cases} \tag{5}$$

สำหรับทุกๆ $n = 0,1,2,3,...$ เมื่อลำดับ $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$ และลำดับ $\{r_n\}\subset(0,\infty)$ โดยที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < \infty$

(2) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n| < \infty$

(3) ลำดับ $\{\lambda_n\}\subset[a,b]$ สำหรับบาง $a,b \in (0,2\alpha)$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n| < \infty$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z\in F(S)\cap EP(F)\cap VI(C,A)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap EP(F)\cap VI(C,A)}f(z)$ และต่อมาปี ค.ศ. 2008 Plubtieng และ Punpaeng ได้นำเสนอวิธีการแก้ไขปัญหาเชิงดุลยภาพโดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบซ้ำชนิดใหม่ซึ่งแตกต่างจาก (Su *et al.*, 2008) โดยผสมแนวคิดของ (Takahashi &Takahashi, 2007) และ (Yao & Yao, 2007) ดังนี้

จากแนวคิดดังกล่าวได้ก่อให้เกิดแนวความคิดที่จะศึกษาถึงวิธีการประมาณค่าแบบหนืดเพื่อค้นหาหรือการประมาณค่าของสมาชิกร่วมของ ปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาเชิงดุลยภาพ และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยใช้เทคนิคของภาพฉายระยะทาง โดยผู้เขียนและคณะได้ค้นพบทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 17 (Plubtieng & Punpaeng, 2008) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ซึ่งเป็นเซตปิดและคอนเวกซ์ ให้ $F: C\times C \to \mathbb{R}$ เป็นการส่งโดเมนเชิงคู่ที่

สอดคล้องเงื่อนไข (A1)-(A4) และ $S:C\to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และให้ $A:C\to H$ เป็นการส่งทางเดียวอย่างเข้มผกผันที่มีค่าสัมประสิทธิ์ α โดยที่ $F(S)\cap EP(F)\cap VI(C,A)\neq\varnothing$ และ $P_C:H\to C$ เป็นภาพฉายระยะทาง กำหนดให้ $x_1=u\in H$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C \\ y_n=P_C(x_n-\lambda_n Ax_n) \\ x_{n+1}=\alpha_n u+\beta_n x_n+\gamma_n SP_C(y_n-\lambda_n Ay_n) \end{cases} \tag{6}$$

สำหรับทุกๆ $n=0,1,2,3,...$ เมื่อ $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,1]$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้คือ

(1) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$

(3) $0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\leq\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$

(4) ลำดับ $\{r_n\}\subset(0,\infty)$ โดยที่ $\liminf_{n\to\infty}r_n>0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n|<\infty$

(5) ลำดับ $\{\lambda_n\}\subset[a,b]$ สำหรับบาง a,b ที่ $0<a<b<2\alpha$ และ $\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ $F(S)\cap EP(F)\cap VI(C,A)$

ปัญหาเปิด และ ก้าวต่อไปของวิธีการประมาณค่า

เพื่อให้ได้องค์ความรู้ที่กว้างขวาง และ ประโยชน์ที่สามารถใช้งานได้มากขึ้น ผู้เขียนขอให้แนวคิด หรือแนวทางในการดำเนินงานต่อไปดังนี้

(1) สามารถขยายแนวคิดของวิธีการประมาณค่า (6) จากการส่งแบบไม่ขยายไปสู่การส่งไม่เชิงเส้นแบบอื่นๆ ที่วางนัยทั่วไปของการส่งแบบไม่ขยายได้หรือไม่

(2) สามารถขยายแนวคิดของวิธีการประมาณค่า (6) จากการส่งโดเมนเชิงคู่ $F:C\times C\to\mathbb{R}$ เป็นระบบของการส่งโดเมนเชิงคู่ได้หรือไม่

(3) สามารถศึกษาวิธีการประมาณค่า (6) ในปริภูมิบานาคเชิงจริง (real Banach spaces) ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริงได้หรือไม่

(4) สามารถขยายแนวคิดของวิธีการประมาณค่า (6) ไปสู่ปัญหาซึ่งเรียกว่า ปัญหาเชิงดุลยภาพวางนัยทั่วไป (Generalized equilibrium problems) ได้หรือไม่

(5) สามารถขยายแนวคิดของวิธีการประมาณค่า (6) ไปสู่ปัญหาซึ่งเรียกว่า ปัญหาเชิงสมการการแปรผันวางนัยทั่วไป (Generalized variational problems) ได้หรือไม่

สรุป

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าการศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าแบบซ้ำสำหรับแก้ไขปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาเชิงดุลยภาพ นั้นนับเป็นหัวข้อการศึกษาที่น่าสนใจและมีประโยชน์เป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นในการคิดค้นทฤษฎีเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ๆ หรือ การขยายกรอบความรู้เดิม ไปสู่ปัญหาเชิงดุลยภาพวางนัยทั่วไป และ ปัญหาเชิงสมการการแปรผันวางนัยทั่วไป หรือปัญหาอื่นๆ อีกมากมายดังที่ได้กล่าวไปข้างต้นทั้งในปริภูมิบานาค และ ปริภูมิฮิลเบิร์ต นั้นนับว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์ ซึ่งถือว่าเป็นรากฐานที่สำคัญในการพัฒนาความรู้ด้านอื่นๆ ซึ่งเป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ ที่เกิดขึ้นจากการวิจัยนั้น นอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขา และแขนงต่างๆ นั้นแล้ว บางครั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (basic science) ซึ่งเป็นการวิจัยพื้นฐาน(basic research) เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติต่อไป

เอกสารอ้างอิง

Baiocchi, C. & Capelo, A. (1984). *Variational and Quasi-Variational Inequalities*. New York: John Wiley & Sons.

Blum, E. & Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Mathematics Student, 63*, 123 -145.

Combettes, P.L. & Hirstoaga, S.A. (2005). Equilibrium programming in Hilbert spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysi,. 6*, 117-136.

Flam, S. D. & Antipin, A. S. (1997). Equilibrium programming using proximal-like algorithms. *Mathematical Programming, 78*, 29--41.

Iiduka, H. & Takahashi, W. (2005). Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings. *Nonlinear Analysis, 61*, 341-350.

Moudafi, A. & Thera, M. (1999). Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems, *Lecture note in Economics and Mathematical Systems*. (pp.187-201). New York: Springer-Verlag.

Noor, M. A. (2010). Projection iterative methods for extended general variational inequalities. *Journal of Applied Mathematics and Computing, 32*(1), 83-95.

Noor, M.A. (2007). General variational inequalities and nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 331*(2), 810–822.

Peng, J.W. & Yao, J.C. (2008). A New Hybrid-Extragradient Method for Generalized Mixed Equilibrium Problems, Fixed Point Problems and Variational Inequality Problems. *Taiwanese Journal Of Mathematics, 12*, 1401-1432.

Plubtieng S. & Punpaeng, R. (2008). A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings and monotone mappings. *Applied Mathematics and Computation, 197*, 548–558.

Su, Y., Shang, M. & Qin, X. (2008). An iterative method of solution for equilibrium and optimization problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 69*, 2709-2719.

Takahashi, S. & Takahashi, W. (2007). Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 311*(1), 506-515.

Takahashi, W. & Toyoda, M. (2003). Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications, 118*(2), 417-428 .

Yao, Y. & Yao, J.-C. (2007). On modified iterative method for nonexpansive mappings and monotone mappings. *Applied Mathematics and Computation, 186*(2), 1551-1558.